الرياضيات

للصف الثاني العلمي

الفصل الدراسي الأول

طبعة ابتدائية

1437 هـ


بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة عامة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمدُ للهِ معزِّ الإسلام بنصره، ومُذلِّ الشركِ بقهره، ومصرِّف الأمور بأمره، ومستدرجِ الكافرين بمكره، الذي قدّر الأيام دولاً بعدله، وجعل العاقبةَ للمتقينَ بفضلِه، والصلاةُ والسلام على من أعلى اللهُ منارَ الإسلام بسيفِه.

أما بعد:

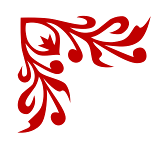
فإنه بفضل الله تعالى، وحسن توفيقه تدخل الدولة الإسلامية اليوم عهداً جديداً، وذلك من خلال وضعها اللبنة الأولى في صرح التعليم الإسلامي القائم على منهج الكتاب، وعلى هدي النبوّة وبفهم السلف الصالح والرعيل الأول لها، وبرؤيةٍ صافية لا شرقيّة ولا غربيّة، ولكن قرآنية نبوية بعيداً عن الأهواء والأباطيل وأضاليل دُعاة الاشتراكية الشرقيّة، أو الرأسمالية الغربيّة، أو سماسرة الأحزاب والمناهج المنحرفة في شتّى أصقاع الأرض، وبعدما تركت هذه الوافدات الكفرية وتلك الانحرافات البدعية أثرها الواضح في أبناء الأمة الإسلامية، نهضت دولة الخلافة -بتوفيق الله تعالى- بأعباء ردّهم إلى جادّة التوحيد الزاكية ورحبة الإسلام الواسعة تحت راية الخلافة الراشدة ودوحتها الوارفة بعدما اجتالتهم الشياطين عنها إلى وهدات الجاهلية وشعابها المهلكة.

وهي اليوم إذ تُقدم على هذه الخطوة من خلال منهجها الجديد والذي لم تدخر وسعاً في اتِّباع خطى السلف الصالح في إعداده، حرصاً منها على أن يأتي موافقاً للكتاب والسنة مستمداً مادته منهما لا يحيد عنهما ولا يعدل بهما، في زمن كثُرَ فيه تحريف المنحرفين، وتزييف المبطلين، وجفاء المعطلين، وغلوا الغالين.

ولقد كانت كتابة هذه المناهج خطوة على الطريق ولبنة من لبنات بناء صرح الخلافة وهذا الذي كُتِب هو جهد المُقِل فإن أصبنا فمن الله وإن اخطأنا فمنا ومن الشيطان والله ورسوله منه بريء ونحن نقبل نصيحة وتسديد كل محِب وكما قال الشاعِر:

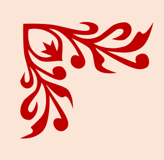
وإن تجد عيباً فسُدَّ الخللا   قد جلَّ من لا عيب فيه وعلا

(وآخر دعوانا أن الحمد لله ربِّ العالمين)




❖محتويات الفصل الدراسي الأول



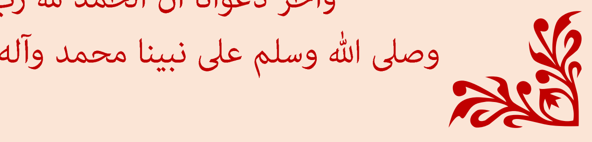
بسم الله الرحمن الرحيم

الحمـد لله، والصـلاة والسـلام عـلى رسـولِ الله، وعـلى آلـه وصـحبه ومـن والاه وبعد

بعد توفيق الله عزَ وجل تم إعداد هذا العمل المتواضع
(كتاب الرياضيات للصف الثاني العلمي)
حيثُ يتألف هذا الكتاب من فصلين دراسيين،
ويتضمن الفصل الدراسي الأول من ثلاثُ وحدات:

الوحدة الأولى الأعداد المركبة
الوحدة الثانية القطوع المخروطية
الوحدة الثالثة تطبيقات التفاضل،
ولقـد راعينـا إسـلوب التـدرج في عـرض المـادة العلميـة ومطعمـة بالتطبيقات العملية .

ونسأل الله تعالى أن يوفق إخواننا المدرسين في توصيل المادة العلمية بصورة صحيحة لطلبتنا الأعزاء.



الوحدة الأولى

الأعداد المركبة



ينبغي بعد دراسة الوحدة الأولى أن يكون الطالب قادراً على أن:

1) يجد الجذور التربيعية للأعداد السالبة
2) يحل معادلة مجموع مربعين ومعادلة مميزها = عدد سالب
3) يضع العدد المركب بالصيغة العادية والصيغة المثلثية
4) يجد الجذور التربيعية والتكعيبية .... للأعداد المركبة بطريقة الصورة المثلثية (القطبية)



مفردات الوحدة الأولى

ت	الموضوع
[1 - 1]	الغرض من توسيع مجموعة الأعداد المركبة
[1 - 2]	العمليات على مجموعة الأعداد المركبة
[1 - 3]	مرافق العدد المركب
[1 - 4]	تساوي عددين مركبين
[1 - 5]	الجذر التربيعي للعدد المركب
[1 - 6]	التمثيل الهندسي للعدد المركب
[1 - 7]	الصورة المثلثية للعدد المركب
[1 - 8]	مفكوك العدد المركب بطريقة ديموافر
[1 - 9]	إيجاد الجذور للعدد المركب بطريقة ديموافر
[1 - 10]	الجذور التكعيبية للواحد الصحيح الموجب

[1-1] الغرض من توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية

من دراستنا السابقة تعرفنا على مجموعات الأعداد وهي:

1) مجموعة الأعداد الطبيعية N

$$N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , \dots\dots\dots \}$$

حيث جمع أو طرح عددين طبيعيين هو عدد طبيعي

2) مجموعة الأعداد الصحيحة Z

$$Z = \{ \dots\dots\dots, 3 , 2 , 1 , 0 , -1 , -2 , -3 , \dots\dots \}$$

وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة $x + a = b$

حيث a ، b أعداد حقيقية

3) مجموعة الأعداد النسبية Q

$$Q = \{ \frac{a}{b} : a , b \in Z , b \neq 0 \}$$

وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة $ax=b$

4) مجموعة الأعداد الحقيقية R

{ الأعداد النسبية والغير نسبية }

وظهرت لتسمح بحلول معادلات مثل $x^2 = 2$ ، $x^2 = 4$

5) مجموعة الأعداد المركبة C

وسندرس في هذا الفصل مجموعة أعداد جديدة وهي مجموعة الأعداد المركبة. وظهرت لحل معادلات غير حقيقية مثل

$$x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = -1 \rightarrow X = \sqrt{-1}$$

$\rightarrow$

لا يوجد عدد حقيقي مربعه =-1

ويرمز للعدد $\sqrt{-1}$ بالرمز i ويعني تخيلي (غير حقيقي)

العدد التخيلي: هو العدد الذي مربعه يساوي -1 ويرمز له بالرمز i مثل $\sqrt{2}i, -5i, 3i$

لذا ظهرت حاجة ماسة لدراسة هكذا أعداد، فعندما يصادفك جذر تربيعي لعدد سالب لا يكون له حل حقيقي بل له حل تخيّلي (غير حقيقي)

ويمكن كتابة الجذور التربيعية لأي عدد حقيقي سالب بدلالة i فمثلا:

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{-9} = 3i$$

$$\sqrt{-25} = 5i$$

$$\sqrt{-12} = 2\sqrt{3}\ i$$

وبصورة عامة يكون :

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\ \sqrt{-1} = \sqrt{a}\ i$$

وبهذا نستطيع حساب قوى (i) كما في الأمثلة الآتية:

$$i^2 = -1$$

$$i^4 = i^2 \,.\, i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$i^7 = (i^2)^3 .i = (-1)^3 .i = -i$$

$$i^{81} = (i^2)^{40} .i = (-1)^{40} .i = i$$

$$i^{-13} = i^{-13}.\,1 = i^{-13}.i^{16} = i^3 = -i$$

ملاحظة

عند رفع (i) لعدد صحيح موجب فالناتج يكون أحد عناصر المجموعة

{ i ، i− ، 1 ، 1−}

ملاحظة

$i^{an+b} = i^{b}$

حيث أن a مضاعفات العدد 4 ، n أعداد طبيعية ، b=0,1,2,3

مثال1

جد ناتج كلاً ممّا يأتي: i^{8n+3} , i^{4n+1}

الحل:

$i^{8n+3} = i^{3} = -i$

$i^{4n+1} = i$

ملاحظة

الصيغة العادية (أو الجبرية) للعدد المركب هي: a+bi

حيث أن a,b∈R $i=\sqrt{-1}$

a يمثل الجزء الحقيقي، bi يمثل الجزء التخيلي



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

يذكر رمز العدد المركب

ويذكر الصيغة الجبرية للعدد المركب

لاحظ الأعداد:

العدد $3+2i$ عدد مركب ، العدد $-8+2i$ عدد مركب

العدد ($3i$) عدد مركب وصيغته العادية هي $0+3i$

العدد ($-2i$) عدد مركب وصيغته العادية هي $0-2i$

العدد 7 عدد مركب وصيغته العادية هي $7+0i$

ملاحظة

العدد a صيغته العادية $a+0i$

العدد bi صيغته العادية $0+bi$

حيث $a,b \in R$



مجموعة الأعداد الحقيقية ح هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة C أي أن $R \subset C$

نستطيع حل المعادلات غير الحقيقية ضمن مجموعة الأعداد المركبة

مثال2

حل المعادلة في **C** : $x^2 + 9 = 0$

الحل

$$X^2 = -9 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$$

مثال3

حل المعادلة في C : $x^2 - 2x + 2 = 0$

الحل

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$X = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

حلول المعادلة هي $\{1+i \ , \ 1-i\}$

[1- 2] العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

أولاً: عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة

ليكن $x = a + bi \quad , \quad y = c + di$

حيث أن a , b , c , d أعداد حقيقية

فأن $x + y = (a+c) + (b+d)i$

أي أن مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت عملية الجمع

خواص عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة

لكل (x_3 , x_2 , x_1) تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة فإن

❶ **الخاصية الإبدالية:** $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

❷ **الخاصية التجميعية:** $x_1+(x_2+x_3) =(x_1+x_2)+ x_3$

❸ **النظير الجمعي:** إذا كان $x=a+bi$ فإن:

$$-x=-a-bi$$

❹ **العنصر المحايد الجمعي:**

العدد المركب $(0+0i)$ هو العنصر المحايد الجمعي للأعداد المركبة.



إن طرح عدد مركب من آخر مركب يساوي

حاصل جمع العدد المركب الأول مع النظير الجمعي للعدد المركب الثاني



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

1) يجد ناتج جمع عددين مركبين أو أكثر
2) يعدد خصائص عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة
3) يجد ناتج طرح عددين مركبين أو أكثر

مثال4

ضع كلاً ممّا يأتي بالصيغة $a+bi$

a) $(5-3i)+(7+6i)$

b) $(7+2i)-(6-4i)$

الحل:

a) $(5-3i)+(7+6i)=12+3i$

b) $(7+2i)-(6-4i) =(7+2i)+(-6+2i)=1+4i$

مثال5

حل المعادلة $(2-3i)+x=-2+i \quad , x\in C$

الحل

$$X=(-2+i)-(2-3i)=(-2+i)+(-2+3i)=-4+4i$$

ثانياً: ضرب عددين مركبين



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

يجد ناتج الضرب لعددين مركبين أو أكثر

مثال6

جد ناتج $(7+3i)(5+2i)$

الحل:

$$(7+3i)(5+2i)=35+14i+15i+6i^2=35+29i-6=29+29i$$

∴ مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت عملية الضرب



مفكوك العدد المركب $(a+bi)^2$

$$(a+bi)^2=(a)^2+2(a)(bi)+(bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

مثال7

ضع المقدار $(3+2i)^2$ بالصيغة العادية للعدد المركب

الحل:

$$(3+2i)^2 = 9+12i+4i^2 = 9+12i-4 = 5+12i$$

مثال8

ضع المقدار $(3+i)^3$ بالصيغة العادية للعدد المركب

الحل:

$$(3+i)^3=(3+i)^2(3+i)=(9+6i+i^2)(3+i)=(8+6i)(3+i)$$

$$= 24+8i+18i+6i^2 = 18+26i$$

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة C

لكل $x_1, x_2, x_3 \in C$ فإن:

❶ الخاصية الإبدالية: $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$

❷ الخاصية التجميعية: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$

❸ النظير الضربي: إذا كان $x = a+bi$ بشرط $x \neq 0+0i$

فإن النظير الضربي هو $\frac{1}{x}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

❹ العنصر المحايد الضربي هو $1+0i$



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

يعدد خصائص عملية الضرب على الأعداد المركبة

[1- 3] مرافق العدد المركب

العدد المركب $x=a+bi$ مرافقه هو $\bar{x}=a-bi$ ، $a , b \in R$



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

يُعرف مفهوم مرافق العدد المركب



خواص المرافق : إذا كانت $x= a+bi$ ، $y = c+ di$

حيث أن $a, b , c , d \in R$ فإن:

❶ $\overline{x \pm y} = \bar{x} \pm \bar{y}$

❷ $\overline{x . y} = \bar{x} . \bar{y}$

❸ $\overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$

❹ $a \in R \rightarrow \bar{a} = a$

❺ $\bar{\bar{x}} = x$

❻ $x . \bar{x} = a^2 + b^2$

نشاط

إذا علمت أن $y=1+i$ ، $x=3+i$ تحقق من خواص تعريف المرافق

ثالثا: قسمة عددين مركبين

لقسمة عددين مركبين

$$\frac{c-di}{c-di} \cdot \frac{a+bi}{c+di}$$ ثم نضع المقدار بالصيغة العادية



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:

يجد ناتج قسمة عددين مركبين بالصيغة العادية للعدد المركب

مثال9

ضع العدد $\frac{3-i}{2+i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب

الحل:

$$\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{6-3i-2i+i^2}{(2)^2+(1)^2} = \frac{5-5i}{5}$$

$$= 1-i$$

مثال10

جد النظير الضربي للعدد المركب $1-i$ بالصيغة العادية للعدد المركب

الحل:

النظير الضربي $= \frac{1}{1-i}$

ثم نضعه بالصيغة العادية:

$$\frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

ملاحظة

يمكن تحليل $a^2 + b^2$ إلى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما على الصورة $a+bi$

مثال11

حلل في مجموعة الأعداد المركبة إلى عاملين وبالصورة $a+bi$ كلاً ممّا يأتي:

أ) $x^2 + 16$

ب) $9y^2 + x^2$

الحل:

أ) $x^2 - 16i^2 = (x-4i)(x+4i)$

ب) $9y^2 - x^2i^2 = (3y-xi)(3y+xi)$

مثال12

حلل في C كلاً ممّا يأتي: 40 ، 10

إلى عاملين وبالصورة $a+bi$ حيث أن a، b عددان نسبيان

الحل:

$40=36+4=36-4i^2=(6-2i)(6+2i)$

Or $=4+36=4-36i^2=(2-6i)(2+6i)$

$10=9+1=9-i^2=(3-i)(3+i)$

Or $=1+9=1-9i^2=(1-3i)(1+3i)$

[1- 4]   تساوي عددين مركبين

إذا كان $x= a+bi \quad , y= c+di$

فان $x=y \Leftrightarrow a=c \quad , b =d$

مثال13

جد قيمة كل من y، x الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة

$x+yi = (1+2i)^2$

الحل:

$X+yi = 1+4i+4i^2 \quad \rightarrow x+yi= -3+4i \quad \rightarrow x=-3 \quad , y=4$

مثال14

جد قيمة كل من y، x الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة

$(-3+3i)x + (1+2i)y = 9$

الحل

$-3x+3xi + y+2yi =9+0i$

$(-3x+y) + (3x+2y)i=9+0i$

$-3x+y=9 \quad \rightarrow \quad y=9+3x \quad$ ....(1)

$3x+2y =0 \quad$ ....(2)

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$3x+2(9+3x)=0 \quad \rightarrow \quad 3x+18+6x=0 \quad \rightarrow 9x=-18$

$X=-2$

عوض في معادلة 1)

$y= 9+3(-2)=9-6=3$

مثال15

جد قيمة كل من y ،x الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة

$$\frac{X^2 + y^2}{2+i} = \frac{2x - 2yi}{1-i}$$

الحل:

$$\frac{X^2 - y^2 i^2}{2+i} = \frac{2(x-yi)}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$\frac{(x-yi)(x+yi)}{2+i} = \frac{2(x-yi)(1+i)}{2}$$

$$X+yi = (2+i)(1+i) \rightarrow x+yi = 2+2i+i+i^2 \rightarrow x+yi = 1+3i$$

$$X=1 \quad , \quad y=3$$

مثال16

إذا علمت أن العددين $x+2yi$ ، $(1-2i)^3$

مترافقان جد قيمة $x,y \in R$

الحل

نبسط العدد $(1-2i)^3 = (1-2i)^2(1-2i) = (1-4i+4i^2)(1-2i)$

$$= (-3-4i)(1-2i) = -3+6i-4i+8i^2 = -11+2i$$

$$\mathbf{X+2yi = \overline{-11+2i} \rightarrow x+2yi = -11-2i}$$

$$X=-11 \quad , \quad 2y=-2 \rightarrow y=-1$$

نشاط

العددان $\frac{3-i}{1+i}$ ، $\frac{x-3yi}{3+2i}$ مترافقان ما قيمة $x,y \in R$

[1 - 5]الجذر التربيعي للعدد المركب

لإيجاد الجذر التربيعي للعدد المركب اتّبِعْ خطوات الحل الآتية:

نفرض أن $x+yi=\sqrt{a+bi}$

ثم نربع الطرفين فنحصل على

$(x+yi)^2 = a+bi$

$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = a+bi$

$x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi$

وحسب مبدأ تساوي عددين مركبين نحصل على:

$x^2 - y^2 = a \quad ....(1)$

$2xy = b \quad ....(2)$

نقوم بحل المعادلتين بطريقة التعويض فنحصل على قيم x، y الحقيقيتين

فنحصل على جذرين أحدهما هو النظير الجمعي للآخر

مثال17

جد الجذور التربيعية للعدد $3+4i$

الحل

نفرض أن $x+yi = \sqrt{3+4i}$

ثم نربع الطرفين فنحصل على

$$(x+yi)^2 = 3+4i$$

$$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 3+4i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i$$

وحسب مبدأ تساوي عددين مركبين نحصل على:

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2xy = 4 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

من معادلة (2 نحصل على $y = \frac{2}{x} \quad \ldots\ldots\ldots(3)$

نعوض في معادلة (1

$$X^2 - \frac{4}{X^2} = 3$$

وبضرب طرفي المعادلة في $س^2$ ينتج :

$$X^4 - 4 = 3x^2 \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x^2-4)(x^2+1) = 0$$

إما $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

نجد قيم y بتعويض قيم x في معادلة (3) $y = \frac{2}{\pm 2} = \pm 1$

او $x^2 = -1$ يهمل لا ينتمي للأعداد الحقيقية

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $x+yi = \pm 2 \pm i$

مثال18

جد ناتج $\sqrt{5-12i}$

الحل

نفرض أن

$$x+yi = \sqrt{5-12i}$$

ثم نربع الطرفين فنحصل على

$$(x+yi)^2 = 5-12i$$

$$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 5-12i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 5-12i$$

وحسب مبدأ تساوي عددين مركبين نحصل على:

$$x^2 - y^2 = 5 \quad \text{.........(1)}$$

$$2xy = -12 \quad \text{........(2)}$$

من معادلة 2) نحصل على

$$y = \frac{-6}{x} \quad \text{.......(3)}$$

نعوض في معادلة 1)

$$X^2 - \frac{36}{X^2} = 5 \rightarrow x^4 - 36 = 5x^2 \rightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$(x^2-9)(x^2+4) = 0 \rightarrow x^2 = 9 \quad \text{or} \quad x^2 = -4 \notin R$$

$$\rightarrow x = 3 \rightarrow y = -2 \quad \text{or} \quad x = -3 \rightarrow y = 2$$

∴ الجذران التربيعيان هما $x+yi = (3-2i) \quad \text{or} \quad (-3+2i)$

تمارين (1-1)

س1) ضع كلاً ممّا يأتي بالصورة a+bi

a) $(1+i^{13}-2i^{22})^3$

b) $(-1+2i)^2+(3-i)(-2+4i)$

c) $(1-i)^5+(1+i)^5$

س2) جد قيمة x، y الحقيقتين في كل ممّا يأتي:

a) $(5+3i)x+(3-2i)y=4-9i$

b) $2x-3yi=\frac{(2-i)^3}{1+2i}$

c) $(1+2i)x+4i-1=(2+3i)y$

d) $(x^2+9y^2)(1+i)=2x+6yi$

س3) حل المعادلات في C

a) $x^2-6x+13=0$ b) $x^2+7=0$

س4) إذا علمت أن العددين $L=\frac{3-i}{X+yi}$, $m=\frac{-1+7i}{3+4i}$ مترافقان جد قيمة x، y الحقيقيتين؟

س5) إذا علمت أن $\frac{x-5i}{2+yi}$ نظير ضربي للمقدار $(-1-i)$ جد قيمة x، y الحقيقيتين؟

س6) جد الجذرين التربيعيين لكلاً ممّا يأتي:

1) $1+\sqrt{3}\,i$ 2) $\frac{-7+i}{1+i}$

[1 − 6] التمثيل الهندسي للعدد المركب

$Z=x+yi$ هي الصيغة العادية(الجبرية) للعدد المركب

والصيغة الإحداثية (الديكارتية) للعدد المركب هي $Z=(x , y)$

مثال 19

ضع الأعداد المركبة الآتية بالصيغة الإحداثية (الديكارتية) ومثّلها هندسياً.

$Z_1=-3+2i$, $Z_2=-1-4i$, $Z_3=1-2i$, $Z_4=1+4i$

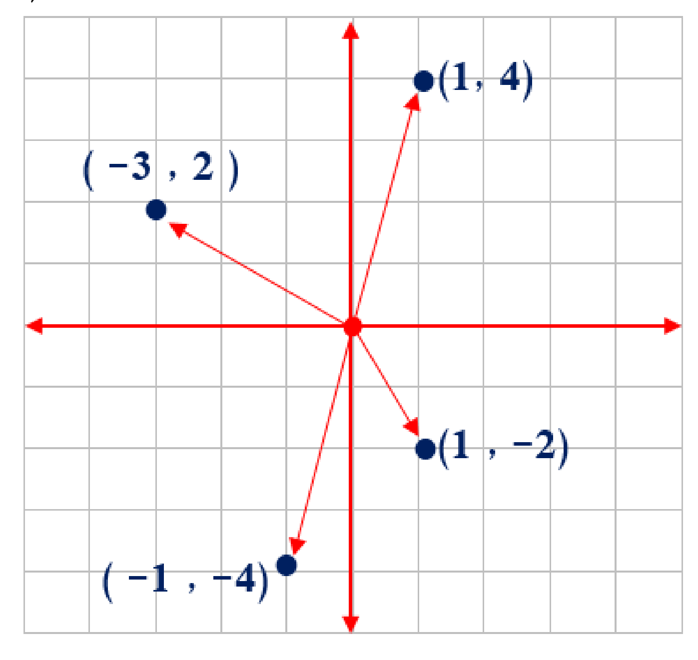
الحل

$Z_1=(-3 , 2)$

$Z_2=(-1 , -4)$

$Z_3=(1 , -2)$

$Z_4=(1, 4)$



الشكل [1−1]

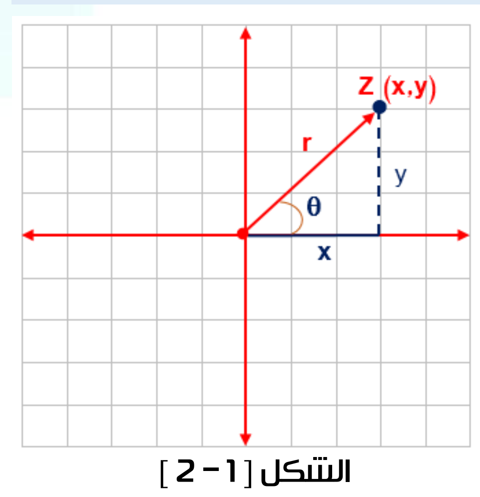
[1 − 7] الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب

الهدف من الدرس



أن يكون الطالب قادراً على أن:

يحول العدد المركب من الصيغة العادية إلى الصيغة المثلثية وبالعكس



الشكل [1 − 2]

من خاصية المثلث القائم الزاوية:

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

r يمثل مقياس العدد المركب z ويرمز له بالرمز $\| z \|$

وهو عدد حقيقي غير سالب (عدد موجب)

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta$$

وبتعويض قيمتي x ، y في الصيغة العادية $z=x + yi$ نحصل على

$$Z = r\cos\theta + r\sin\theta\, i \rightarrow z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

✍ مراجعة لمادرسه الطالب في مرحلة الأول علمي

القيمة الأساسية للسعة $\theta \in (0 , 2\pi]$

الدالة	30^0	60^0	45^0
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

في الربع الأول ← القيمة الأساسية للسعة $= \theta$

في الربع الثاني ← القيمة الأساسية للسعة $= \pi - \theta$

في الربع الثالث ← القيمة الأساسية للسعة $= \pi + \theta$

في الربع الرابع ← القيمةالأساسية للسعة $= 2\pi - \theta$

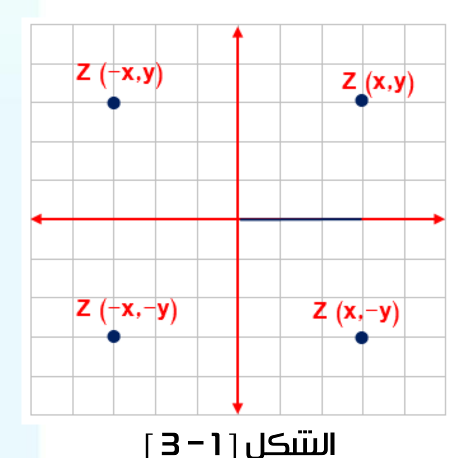
موقع النقطة (x , y)

في الربع الأول ← (x , y)

في الربع الثاني ← $(-x , y)$

في الربع الثالث ← $(-x , -y)$

في الربع الرابع ← $(x , -y)$



الشكل [1 − 3]

مثال20

جد الصورة المثلثية للعدد المركب $1+\sqrt{3}\ i$

الحل

$(1\ ,\sqrt{3}\ )$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}\quad\rightarrow\quad\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\quad\rightarrow\quad\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

القيمة الأساسية للسعة= $\frac{\pi}{3}$

الصورة المثلثية ← $Z=r\,[\cos\theta+i\sin\theta\,]$

$$Z=2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

مثال21

حول الصيغة العادية للعدد المركب $(1-i)$ إلى الصيغة المثلثية؟

الحل

$(1 \ , -1)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

موقع النقطة $(1 \ ، -1)$ في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

القيمة الأساسية للسعة $= \frac{7\pi}{4}$

الصورة المثلثية ← $Z = r\,[\cos\theta + i\sin\theta]$

$$Z = \sqrt{2}\,\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$$

مثال22

حول الصورة المثلثية للعدد المركب $Z= 2 [\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}]$

إلى الصيغة العادية للعدد المركب

الحل : $\cos 300^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\sin 300^0 = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$Z = 2 [\frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) i] = 1 - \sqrt{3} i$$

مثال23

حول الصيغة العادية للعدد المركب ($-2-2i$) إلى الصيغة المثلثية

الحل

$$(-2 , -2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow \cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow \sin\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

موقع النقطة $(-2 ، -2)$ في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

الصورة المثلثية ⟵ $Z = r [\cos\theta + i\sin\theta]$

$$Z = 2\sqrt{2} [\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}]$$

مثال24

ضع العدد $2\sqrt{3} - 2i$ بالصيغة المثلثية(القطبية)

الحل

$$(2\sqrt{3}\ ,\ -2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow \cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow \sin\theta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

القيمة الأساسية للسعة= $\frac{11\pi}{6}$

الصورة المثلثية ← $Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$$Z = 4\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right]$$

نشاط

أكتب المقدار $\frac{4}{1 - \sqrt{3}\,i}$ بالصورة المثلثية

مثال25

عبر عن كلاً من الأعداد الآتية بالصيغة القطبية:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

الحل

a) $1 = 1+0i \rightarrow (1, 0)$

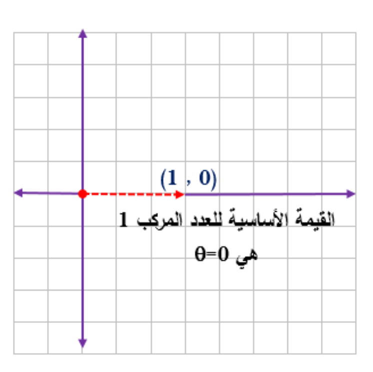
$r = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 1$

$\cos\theta = 1$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0$

$Z = 1(\cos 0 + i\sin 0)$



الشكل [4-1]

b) $-1 = -1+0i \rightarrow (-1, 0)$

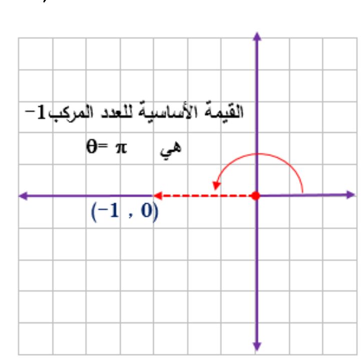
$r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$

$\cos\theta = -1$

$\sin\theta = 0$

$\theta = \pi$

$Z = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$



الشكل [5-1]

c) $i = 0+i \rightarrow (0, 1)$

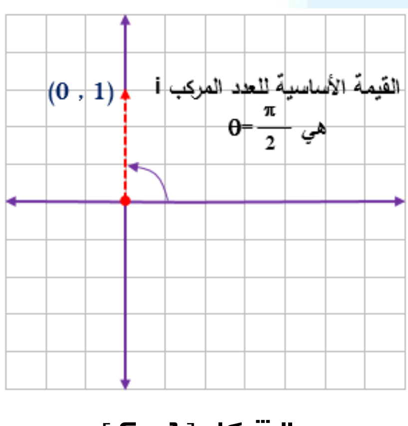
$r = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1$

$\cos\theta = 0$

$\sin\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$Z = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$



الشكل [1 - 6]

d) $-i = 0-i \rightarrow (0, -1)$

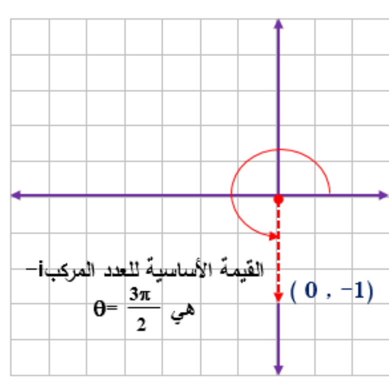
$r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1$

$\cos\theta = 0$

$\sin\theta = -1$

$\theta = \frac{3\pi}{2}$

$Z = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$



الشكل [1 - 7]

إستنتاج

الصورة المثلثية للعدد 1	$1 = \cos 0 + i\sin 0$
الصورة المثلثية للعدد 1−	$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$
الصورة المثلثية للعدد i	$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
الصورة المثلثية للعدد i−	$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

مثال26

عبر عن كلاً من الأعداد الآتية بالصيغة (المثلثية) القطبية

$3 \ , \ -5 \ , \ 2i \ , \ -7i$

الحل

$$3[\ 1\ ] = 3\ [\ \cos 0 + i\sin 0\ ]$$

$$5[\ -1\ ] = 5\ [\ \cos\pi + i\sin\pi\ ]$$

$$2[\ i\ ] = 2\ [\ \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\ ]$$

$$7[\ -i\ ] = 7\ [\ \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\ ]$$

مثال 27

ضع المقدار $\frac{1-i}{1+i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد صورته المثلثية.

الحل

$$\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i-i+i^2}{2} = -i$$

الصيغة العادية للعدد المركب $= 0-i$

الصورة المثلثية للعدد المركب $-i$ هي:

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

ملاحظة

إذا كانت:

$Z_1 = r_1 [\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$

$Z_2 = r_2 [\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

فإن:

$$1)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$2)\ z_1 . z_2 = r_1 . r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

مثال28

إذا كانت

$$Z_1 = 4 \left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \right]$$

$$Z_2 = 2 \left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right]$$

جد a) $z_1.z_2$ b) $z_1 \div z_2$

الحل

$$a)\ \theta = \theta_1+\theta_2 = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi+\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z_1.z_2 = 4\times2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$$

$$z_1.z_2 = 8\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$b)\ \theta = \theta_1 - \theta_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi - \pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$z_1 - z_2 = (4 \div 2)[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}] = 2[\ i\ ] = 2i$$

ملاحظة

يمكن إثبات صحة المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta\ i^2$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$$

نشاط

حلل المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ إلى عاملين ضمن مجموعة الأعداد المركبة

[8-1] مبرهنة ديموافر



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:
يوجد مفكوك عدد مركب

لكل n تنتمي للأعداد الطبيعية ، θ تنتمي للأعداد الحقيقية فإن:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

مثال29

احسبْ
$$\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^4$$

الحل:

$$\left(\cos\frac{12\pi}{8} + i\sin\frac{12\pi}{8}\right)$$

$$\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

ملاحظة

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

مثال30

احسبْ
$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-5}$$

الحل

$$\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3} = \cos 300^0 - i\sin 300^0$$

$$= \cos 60^0 - (-i\sin 60^0) = \cos 60^0 + i\sin 60^0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

[1-9] مفكوك العدد المركب بطريقة ديموافر



الهدف من الدرس
أن يكون الطالب قادراً على أن:
1) يجد مفكوك العدد المركب
2) يجد الجذور التربيعية أو التكعيبية

مثال31

جد مفكوك $(1-i)^5$ بطريقة ديموافر

الحل

$(1 \ , -1)$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

موقع النقطة $(1 \ , -1)$ في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z^5 = (\sqrt{2})^5 [\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}]^5$$

$$Z^5 = 4\sqrt{2} [\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4}]$$

بطرح 4 دورات
$-4\times2\pi$

$$Z^5 = 4\sqrt{2} [\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}]$$

$$Z^5 = 4\sqrt{2} [\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i] = -4+4i$$

مثال32

جد مفكوك $(-1+\sqrt{3}\ i)^7$ بطريقة ديموافر

الحل

$$(-1\ ,\sqrt{3}\ )$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ =\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}\ =\sqrt{4}\ =\ 2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}\ \rightarrow\ \cos\theta=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\ \rightarrow\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

القيمة الأساسية للسعة

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$Z^7=2^7\,[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}]^7$$

$$Z^7=128\,[\cos\frac{14\pi}{3}+i\sin\frac{14\pi}{3}]$$

بطرح 2 دورة

$-2\times 2\pi$

$$Z^7=128\,[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}]$$

$$Z^7=128\,[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\ ]=-64+64\sqrt{3}\ i$$

[1-10] إيجاد الجذور للعدد المركب بطريقة ديموافر

لكل n تنتمي للأعداد الصحيحة الموجبة، θ تنتمي للأعداد الحقيقية فإن:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

مثال33

جد الجذور التربيعية للعدد المركب $1+\sqrt{3}\,i$ بطريقة ديموافر

الحل

$$(1\ ,\sqrt{3}\ )$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\ ,\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \theta=\frac{\pi}{3}$$

$$Z=2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\sqrt{Z}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right]$$

$$k=0\ \rightarrow\ \sqrt{Z}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\sqrt{Z}=\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right]$$

$$k=1\ \rightarrow\ \sqrt{Z}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right]$$

$$\sqrt{Z}=\sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right]$$

مثال34

جد الجذور التكعيبية للعدد 27i بطريقة ديموافر

الحل

$0+27i \rightarrow (0, 27)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (27)^2} = \sqrt{(27)^2} = 27$

$\cos\theta = 0 \quad , \quad \sin\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$Z = 27 \left[\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right]$

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{27} \left[\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right]$$

$k=0 \rightarrow Z = 3 \left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right] = 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right]$

$k=1 \rightarrow Z = 3 \left[\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6} \right] = 3\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right]$

$k=2 \rightarrow Z = 3 \left[\cos\frac{9\pi}{6} + i \sin\frac{9\pi}{6} \right] = 3[-i] = -3i$

تمارين(1−2)

س1) إذا علمت أن $Z=\frac{1-5i}{2+3i}$ ضع بالصورة المثلثية كلاً من:

$$z \quad , \quad \bar{z} \quad , \quad \frac{1}{z}$$

س2) جد قيمة كلاً ممّا يأتي:

a) $\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

b) $(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) \div (\cos 15^\circ - i\sin 15^\circ)$

س3) جد ناتج كلاً ممّا يأتي وبطريقة ديموافر

a) $(-2\sqrt{3} - 2)^{13}$ b) $(3 - 3i)^9$ c) $\left(\frac{-1+7i}{3+4i}\right)^8$

س4) جد الجذرين التربيعيين بطريقة ديموافر لكلاً ممّا ياتي:

a) $-1+\sqrt{3}\,i$ b) $4i(1+i)^{-1}$ c) $16i$

س5) جد الجذور التكعيبية بطريقة ديموافر لكلاً ممّا يأتي:

a) $-27i$ b) $8i$ c) i

س6) جد $\sqrt[5]{32i}$ وبطريقة ديموافر





الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

يجد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 & \text{جذر حقيقي وهو} \\ -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i & \text{جذرين تخيليين مترافقين هما} \end{cases}$$

نفرض أن $Z = \sqrt[3]{1}$

نكعب الطرفين $Z^3 = 1$

نحلل بطريقة الفرق بين مكعبين $Z^3 - 1 = 0$

$$(Z - 1)(Z^2 + Z + 1) = 0$$

إمّا $z - 1 = 0 \rightarrow z = 1$

أو $z^2 + z + 1 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 1$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{-(1) \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح الموجب هي:

$$1 \quad , \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

1) مربع أي من الجذرين المركبين يساوي الجذر المركب الآخر وهما مترافقان
2) مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح =0
3) الفرق بين الجذرين التخيليين = $\pm\sqrt{3}$
4) حاصل ضرب الجذرين التخيليين =1

فإذا رمزنا لأحد الجذرين المركبين بالرمز (ω) فإن الجذر الآخر هو (ω^2)

ولذلك يمكن كتابة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح على الصورة:

$$1 \quad , \quad \omega \quad , \quad \omega^3$$

وهذه الجذور تحقق الخواص الآتية:

❶ $\omega^3=1$

❷ $1+\omega+\omega^2=0$

ومن هذه الخاصية نحصل على:

$\omega+\omega^2=-1$

$1+\omega=-\omega^2$

$1+\omega^2=-\omega$

قوى ω

من الخاصية $\omega^3 = 1$ يمكن التوصل إلى النتائج الآتية:

$$\omega^4 = \omega^3\,\omega = (1)\cdot\omega = \omega$$

$$\omega^5 = \omega^3\,\omega^2 = (1)\cdot\omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^6 = \omega^3\,\omega^3 = (1)\,(1) = 1$$

$$\omega^{64} = [\omega^3]^{21}\,\omega = (1)^{21}\,\omega = \omega$$

$$\omega^{125} = [\omega^3]^{41}\,\omega^2 = (1)^{41}\,\omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{-7} = \omega^{-7}\,\omega^9 = \omega^2$$

$$\omega^{-58} = \omega^{-58}\,\omega^{60} = \omega^2$$

وبالاستمرار على هذا المنوال فإن قوى (ω) لأعداد صحيحة تأخذ إحدى القيم 1 ، ω ، ω^2

ملاحظة $\omega^{3n+a} = \omega^a$

حيث أن: n عدد صحيح ، $a=0 , 1 , 2 , 3$

فمثلا $\omega^{3n+2} = \omega^2$

مثال 35

أثبت أن $(9+5\omega+5\omega^2)^2=-2(3+\omega+3\omega^2)^3$

الحل

الطرف الأيسر

$$(9+5[\omega+\omega^2])^2=(9+5[-1])^2=(9-5)^2=(4)^2=16$$

الطرف الأيمن

$$-2(3+3\omega^2+\omega)^3=-2(3[1+\omega^2]+\omega)^3$$
$$=-2(3[-\omega]+\omega)^3$$
$$=-2(-3\omega+\omega)^3$$
$$=-2(-2\omega)^3=-2(-8\omega^3)=16$$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

مثال 36

سهل المقدار $(1+i+\omega)(1+i+\omega^2)$

الحل

$$(1+\omega+i)(1+\omega^2+i)=(-\omega^2+i)(-\omega+i)$$
$$=\omega^3-i\omega^2-i\omega+i^2$$
$$=1-i[\omega^2+\omega]+(-1)$$
$$=1-i[-1]-1=i$$

مثال37

جد قيمة $(-1+3\omega-\omega^2)(2+3\omega^2+2\omega)$

الحل

$$= (-1-\omega^2+3\omega)(3\omega^2+2+2\omega)$$
$$= (\omega + 3\omega)(3\omega^2 + 2[1+\omega])$$
$$= (4\omega)(3\omega^2 + 2[-\omega^2])$$
$$= (4\omega)(3\omega^2 - 2\omega^2)$$
$$= (4\omega)(\omega^2) = 4\omega^3 = 4\times1 = 4$$

مثال38

جد قيمة $(1-6\omega-2\omega^2)(2-\omega-5\omega^2)$

الحل

$$= (1-6[-1-\omega^2]-2\omega^2)(2-\omega-5[-1-\omega])$$
$$= (1+6+6\omega^2-2\omega^2)(2-\omega+5+5\omega)$$
$$= (7+4\omega^2)(7+4\omega)$$
$$= 49+28\omega+28\omega^2+16\omega^3$$
$$= 49+28[\omega+\omega^2]+16\times1$$
$$= 49+28[-1]+16$$
$$= 49-28+16$$
$$= 37$$

مثال39

ضع المقدار $(5-2i\omega-2i\omega^2)^2$ بالصيغة العادية للعدد المركب

الحل

$$(5-2i[\omega+\omega^2])^2 = (5-2i[-1])^2 = (5+2i)^2 = 25+20i-4 = 21+20i$$

مثال40

جد قيمة $(1+9\omega^{-2}+\omega^{2})(-1-4\omega^{-1}-\omega)$

الحل

$$= (1+9\omega^{-2}\,\omega^{3} + \omega^{2})(-1-4\omega^{-1}\omega^{3} - \omega)$$
$$= (1+9\omega +\omega^{2})(-1-4\omega^{2}-\omega)$$
$$= (1+\omega^{2} +9\omega)(-1-\omega-4\omega^{2})$$
$$= (-\omega +9\omega)(\omega^{2}-4\omega^{2})$$
$$= (8\omega)(-3\omega^{2})=-24\omega^{3}=-24\times1=-24$$

مثال41

كون المعادلة التربيعية التي جذراها

$L=(1-2\omega-2\omega^{2})^{2}$, $m=(3+2\omega+3\omega^{2})^{3}$

الحل:

الجذر الأول

$$m=(3+2\omega+3\omega^{2})^{3}= (3[1+\omega^{2}]+2\omega)^{3} =(3[-\omega]+2\omega)^{3}=(-\omega)^{3}=-1$$

الجذر الثاني

$$L=(1-2[\omega+\omega^{2}])^{2} =(1-2[-1])^{2} = (1+2)^{2}=(3)^{2}=9$$

مجموع الجذرين $m+L= -1+9 = 8$

ضرب الجذرين $m.L= (-1)(9) =-9$

المعادلة التربيعية $x^{2}-(m+L)\,x + m.L =0$

$$x^{2}-(8)\,x + (-9) =0 \quad \rightarrow \quad x^{2} -8x -9=0$$

مثال 42

إذا علمت أن $L= 2\omega^2 +3\omega$, $m=2\omega+3\omega^2$

1) برهن أن m ، L مترافقان

2) كون المعادلة التربيعية التي جذراها m ، L

الحل

1)

$$m+L= 2\omega+3\omega^2 + 2\omega^2 +3\omega$$

$$m+L= 2\omega+3\omega +3\omega^2 +2\omega^2$$

$$m+L= 5\omega +5\omega^2 =5[\omega+\omega^2]=5[-1]=-5$$

$$m.L=(2\omega+3\omega^2)(2\omega^2 +3\omega)$$

$$m.L=4\omega^3 +6\omega^2 +6\omega^4 +9\omega^3$$

$$m.L= 4\times1 +6\omega^2+6\omega^3\omega +9\times1$$

$$m.L= 13+6[\omega^2 +\omega]=13+6[-1]=13-6=7$$

العددان مترافقان لان مجموعهما وضربهما = عدد حقيقي

2) المعادلة التربيعية

$$x^2-(m+L)\ x + m.L =0$$

$$x^2-(-5)\ x + 7 =0$$

$$x^2+ 5x + 7 =0$$

تمارين (1 – 3)

س1) اكتب المقادير الآتية في أبسط صورة:

a) $(1+\omega)^6 + (1+\omega^2)^3$

b) $(3+4\omega+3\omega^2)^{15}$

c) $\omega^{9n+5}+\omega^{3n-2}+1$

س2) جد قيمة كلاً ممّا يأتي:

a) $(1-\omega)^6$

b) $(\omega+3\omega^8+2\omega^{15})^2$

c) $(\omega^{-5}+i\omega^{-1}+i\omega^{-8}+\omega^{-1})^2$

d) $(\omega-\omega^2)^4$

س3) أثبت أن:

a) $\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)^3 + \left(1-\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega}\right)^3 = 7$

b) $\left(\frac{2\omega+1}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{-1+\omega^2}{\omega^2}\right)^2 = 0$

س4) كون المعادلة التربيعية التي جذراها

a) $(1+\omega-\omega^2)^3 \quad , \quad (1-\omega+\omega^2)^3$

b) $1+2i\omega \quad , \quad 1+2i\omega^2$

c) $\frac{i}{1-\omega} \quad , \quad \frac{i}{2+\omega}$

الوحدة الثانية

القطوع المخروطية



الهدف من دراسة الوحدة

ينبغي بعد دراسة الوحدة الثانية أن يكون الطالب قادراً على أن:

1) يعرف القطوع المخروطية (دائرة–مكافئ–ناقص–زائد)
2) يجد معادلة القطع المخروطي (دائرة–مكافئ–ناقص–زائد)
3) يرسم القطع المخروطي (دائرة–مكافئ–ناقص–زائد)
4) يحل تطبيقات عملية تخص القطع المخروطي

مفردات الوحدة الثانية

[2- 1] موضوعات في الهندسة التحليلية

تتضمن دراسة الهندسة المستوية دراسة الأشكال المختلفة كالخطوط المستقيمة والدوائر والمثلثات التي تقع في مستوى واحد وتبرهن النظريات بطريقة الاستنتاج ابتداءً ببديهيات معينة.

أما في الهندسة التحليلية فتدرس الأشكال المستوية بواسطة استحداث نظام إحداثيات (x ،y) ثم استعمال قوانين ومعادلات مختلفة.

وإذا أردنا تلخيص دروس الهندسة التحليلية بجملة واحدة فلربما كان التلخيص المناسب كما يلي تعطى معادلة ما لتجد بيانها، أو بالعكس تعطى بيانا لمعادلة ما فتجد هذه المعادلة. وفي هذا الفصل سنستعمل طريقة الإحداثيات لدراسة بعض الأشكال المستوية الأساسية.

إن جميع الاشكال التي سندرسها في هذا الفصل يمكن الحصول عليها من تقاطع مستوى معين مع مخروط دائري قائم كما في الشكل (2 –1) ولهذا سميت بالقطوع المخروطية ويمكن تلخيص الحالات كما يلي:

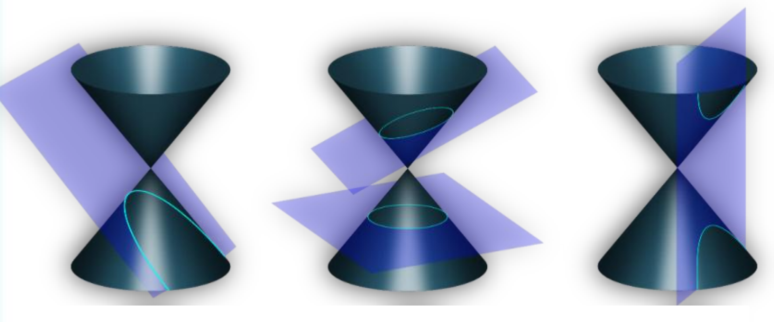
إذا قطع سطح المخروط الدائري القائم:

❶ بمستو عمودي على محور المخروط الدائري القائم ولا يحوي رأس المخروط فإن المقطع يمثل شكلاً هندسياً **يسمى دائرة.**

❷ بمستو مواز لأحد مولداته فإن المقطع يمثل شكلاً هندسياً **يسمى القطع المكافئ.**

❸ بمستو غير مواز لقاعدته ولا يوازي أحد مولداته فإن المقطع يمثل شكلاً هندسياً **يسمى القطع الناقص.**

❹ بمستو يوازي محور المخروط الدائري القائم ويقطع مولدين من مولدات المخروط الدائري القائم فإن المقطع يمثل شكلاً هندسياً **يسمى القطع الزائد.**



الشكل [2 – 1]

الفائدة العملية لدراسة القطوع المخروطية

إذا أمعنا النظر في خلق الله عز وجل في هذا الكون الكبير سوف نرى:

- الكواكب والنجوم تتحرك في مدارات إهليلجيه (قطع ناقص)
- وفي الذرة نلاحظ أن الألكترونات تدور حول النواة على مدارات إهليلجيه
- وفي انتشار الصوت حيث نلاحظ في آلات تكبير الصوت الحديثة
- وكذلك تستخدم في انتشار الضوء كما في ضوء السيارة فهو مجسم مكافئ وضع في بؤرته مصباح وعندما ينطلق شعاع ضوئي من المصباح ينعكس هذا الشعاع على السطح المجسم وبصورة أفقية وكذلك جميع الأشعة المنطلقة من المصباح ممّا يؤدي إلى إنارة الطريق أمام السيارة
- وكذلك في الرادار لتعقب طائرات العدو، وفي الصواريخ .... الخ



[2 -2] القطع المخروطي

لتكن (x ،y) نقطة ثابتة في المستوي وليكن ax+by+c=0 مستقيماً ثابتاً في المستوي نفسه، عندئذ مجموعة كل النقاط التي نسبة بعد كل منها عن النقطة (x ،y) إلى بعدها عن المستقيم ax+by+c=0 تساوي عدداً ثابتاً. تكون شكلاً هندسياً يسمى بالقطع المخروطي.

ممّا سبق نلاحظ أن لكل قطع مخروطي (ماعدا الدائرة) ثلاثة مفاهيم أساسية يتعين بها هي:

أ) النقطة الثابتة (x ،y) تسمى بؤرة القطع المخروطي

ب) المستقيم الثابت ax+by+c=0 يسمى دليل القطع المخروطي

جـ) النسبة $\frac{c}{a}$ تسمى بالاختلاف المركزي.

الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادراً على أن:
يذكر المعادلة العامة للقطع المخروطي





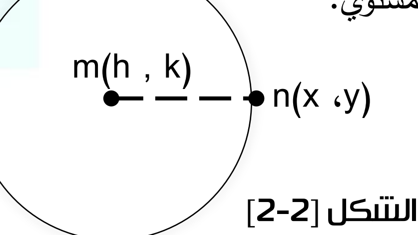
الاختلاف المركزي للقطع = $\frac{c}{a}$

في الدائرة الاختلاف المركزي = 0
في القطع المكافئ الاختلاف المركزي =1
في القطع الناقص الاختلاف المركزي يكون أقل من الواحد
في القطع الزائد الاختلاف المركزي يكون أكبر من الواحد

[3 −2] الدائرة

هي مجموعة النقط في المستوي التي يكون بعدها من نقطة ثابتة تسمى (المركز) يساوي مقداراً ثابتاً يسمى (نصف القطر) لذا سنرمز لمركز الدائرة بالرمز $m(h ,k)$ ونرمز لنصف قطر الدائرة بالرمز (r)

حيث أن (x , y) هي نقطة في المستوي.



الشكل [2-2]



الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادراً على أن:
يُعرف مفهوم الدائرة

[2−4] معادلة الدائرة القياسية

دائرة مركزها $m(h ,k)$ ونصف قطرها (r) من الوحدات حيث أن $r > 0$
والنقطة $n(x ,y)$ نقطة في المستوي الإحداثي فإن: $\overline{mn} = r$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

وبتربيع الطرفين سنحصل على الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

حالة خاصة

في حالة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل $(0 , 0)$ ونصف قطرها (r) تصبح الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة هي: $x^2 + y^2 = r^2$

مساحة ومحيط الدائرة

مساحة الدائرة $A=\pi r^2$

محيط الدائرة $P=2\pi r$

مثال 1

دائرة مركزها (5 ، 3) ونصف قطرها (4) وحدات جد معادلتها ومساحتها ومحيطها .

الحل

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \rightarrow (x-3)^2+(y-5)^2=16$$

مساحة الدائرة $A=\pi r^2 \quad =\pi(4)^2=16\pi$

محيط الدائرة $P=2\pi r \quad =2\pi(4)=8\pi$



الشكل [3-2]

مثال 2

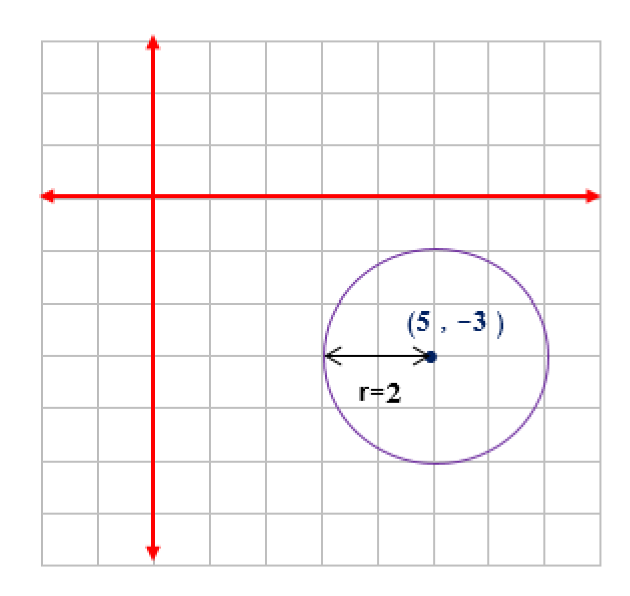
دائرة مركزها $(5 ، -3)$ ومساحتها 4π وحدة مربعة جد معادلتها ثم ارسمها .

الحل

$$A=\pi r^2 \rightarrow 4\pi = \pi r^2 \rightarrow r^2=4 \rightarrow r=2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 = 4$$

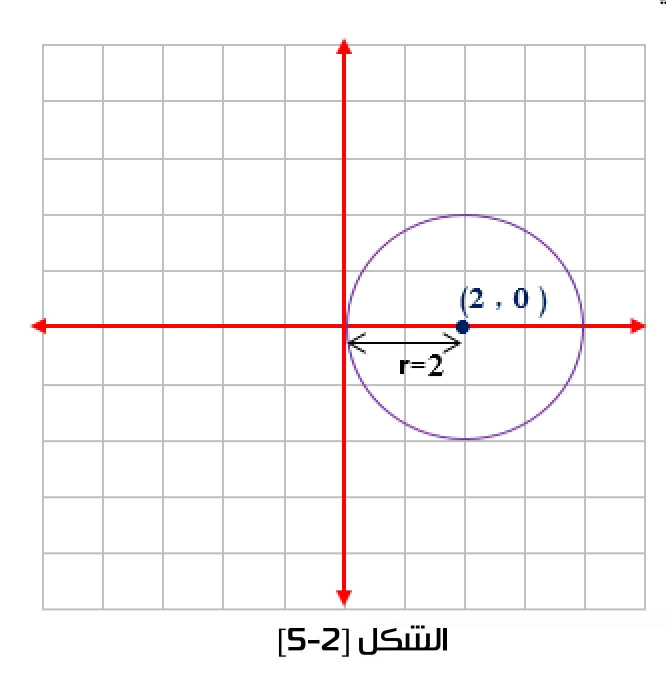
الرسم



الشكل [4-2]

مثال 3

من الشكل الآتي جد معادلة الدائرة ومساحتها ومحيطها.



الشكل [5-2]

الحل

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x-2)^2 + (y-0)^2 = 4$$

مساحة الدائرة $A=\pi r^2 = \pi(2)^2 = 4\pi$

محيط الدائرة $P=2\pi r = 2\pi(2) = 4\pi$

مثال 4

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (2 ، 2).

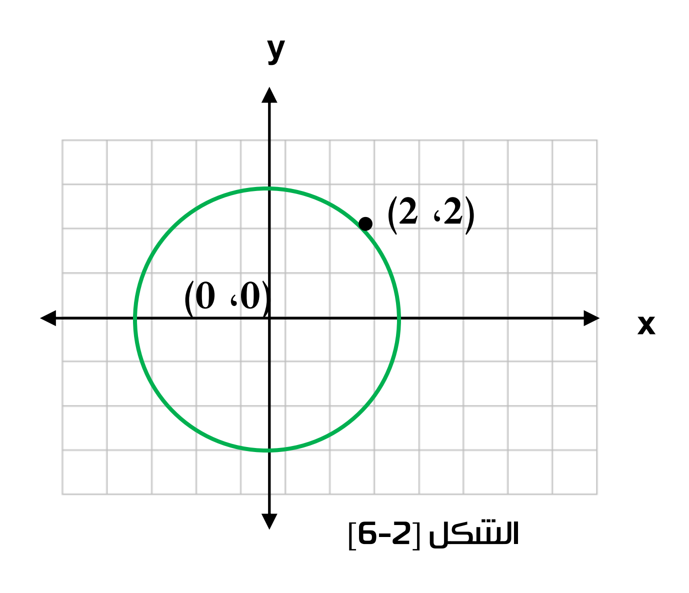
الحل:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$$

معادلة الدائرة

$$X^2 + y^2 = r^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 8$$



الشكل [6-2]

طريقة ثانية للحل:

نعوض النقطة (2 ، 2) في معادلة الدائرة

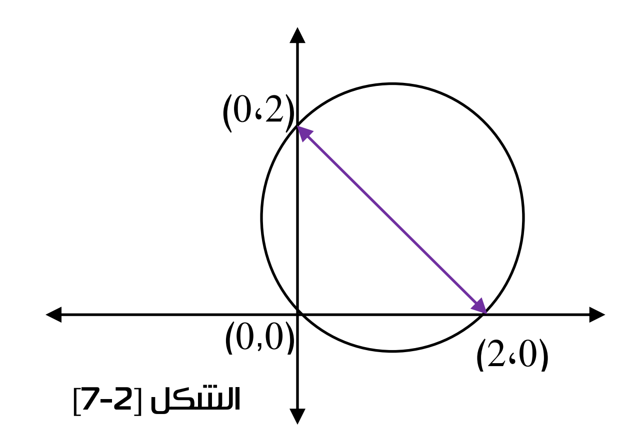
$$X^2 + y^2 = r^2 \rightarrow (2)^2 + (2)^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 8$$

$$X^2 + y^2 = r^2 \rightarrow X^2 + y^2 = 8$$

مثال 5

جد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتقطع جزئيين متساويين موجبين من المحورين طول كل منهما = 2 وحدة

الحل)



الشكل [7-2]

المركز (h , k) هو منتصف النقطتين $(0 ، 2)$، $(2، 0)$

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

$$k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

المركز = $(1 ، 1)$

ولحساب r نجد البعد بين المركز $(1 ، 1)$ وإحدى النقطتين ولتكن $(2 ، 0)$

الحل:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$$

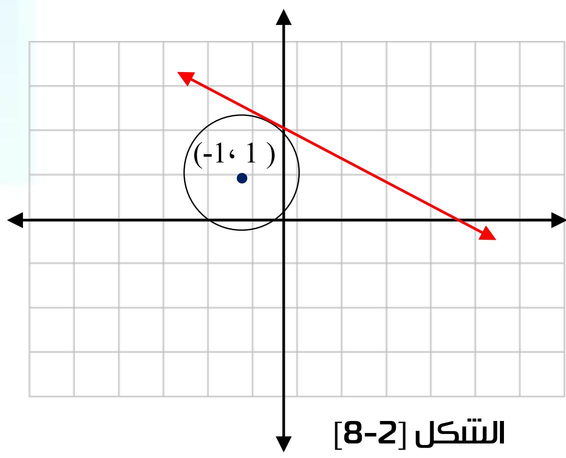
معادلة الدائرة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

مثال 6

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-1، 1)$ وتمس المستقيم الذي معادلته

$$X+2y+4=0$$



الشكل [2-8]

ومن معادلة المستقيم

$$ax+by+c=0$$
$$1x+2y+4=0$$

$$\left.\begin{matrix} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \end{matrix}\right\}$$

r يحسب من قانون البعد بين المستقيم ونقطة خارجة عنه $(-1 ، 1)$

$$r=\frac{|a.h+b.k+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\times(-1)+2\times(1)+4|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\sqrt{5}$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \rightarrow \quad (x+1)^2+(y-1)^2=5$$

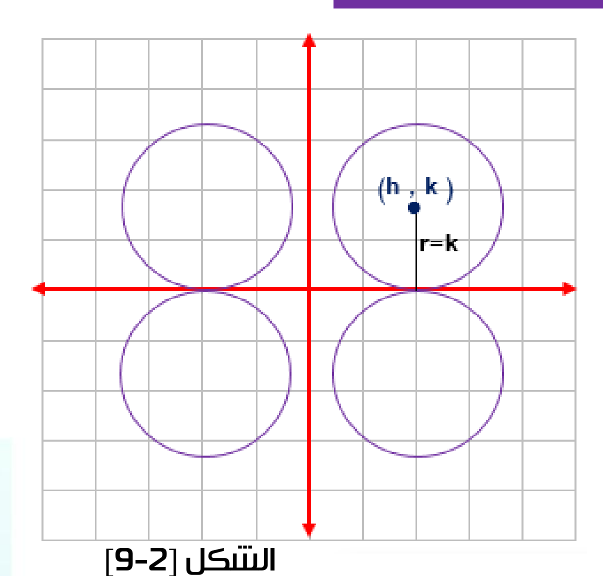
[5 -2] معادلة الدائرة إذا مست احد المحورين او مع كليهما

الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:
يجد معادلة الدائرة أذا مست أحد المحورين أوكليهما

❶ إذا مست الدائرة التي مركزها (h ،k) ونصف قطرها (r) محور السينات فإن:

$r = |k|$ ونقطة التماس $(h ، 0)$



الشكل [2-9]

مثال 7

جد معادلة الدائرة التي تمس المحور السيني ومركزها (3 ، 2)

الحل:

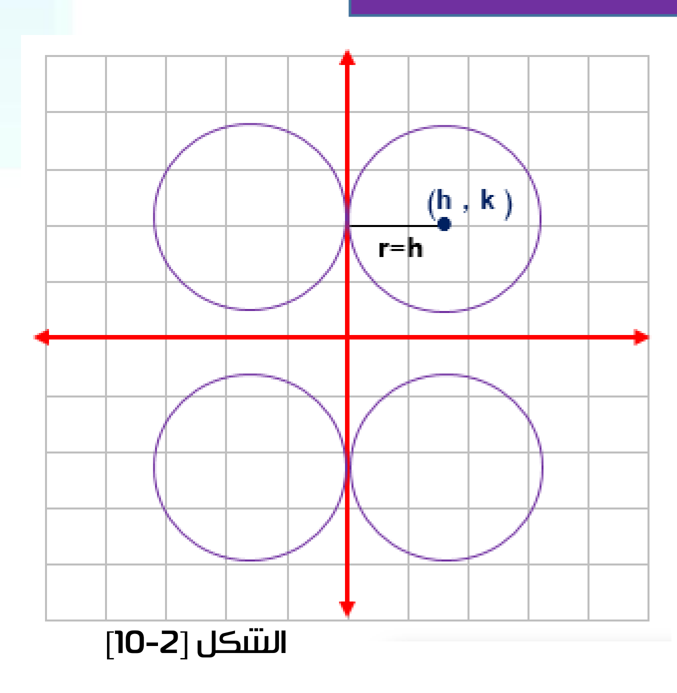
الدائرة تمس محور السينات ← $r = |k| = 2$

معادلة الدائرة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

❷إذا مست الدائرة التي مركزها $(h ، k)$ ونصف قطرها (r) محور الصادات فإن:

$r = |h|$ ونقطة التماس $(0 ، k)$



الشكل [2-10]

مثال 8

جد معادلة الدائرة التي تمس المحور الصادي ومركزها $(4 ، -1)$

الحل

الدائرة تمس محور الصادات ← $r = |h| = 4$

معادلة الدائرة

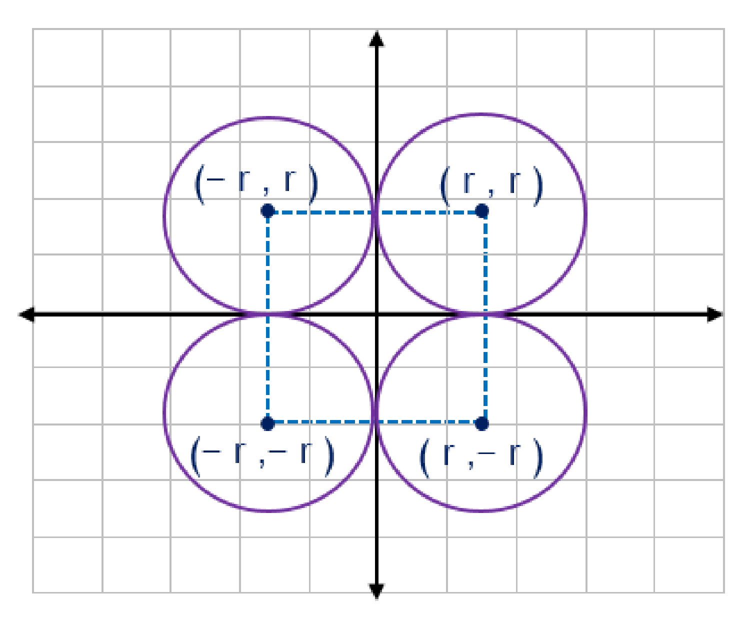
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 = 16$

❸إذا مست الدائرة التي مركزها (h,k) ونصف قطرها (r) المحورين فإن:

$r = |h| = |k|$ ونقطتي التماس $(h , 0)$ ، $(0 , k)$

فإذا كانت الدائرة تمس المحورين وتقع في :

1) الربع الأول يكون مركزها (r , r)
2) الربع الثاني يكون مركزها $(-r , r)$
3) الربع الثالث يكون مركزها $(-r , -r)$
4) الربع الرابع يكون مركزها $(r , -r)$



الشكل [2-11]

مثال 9

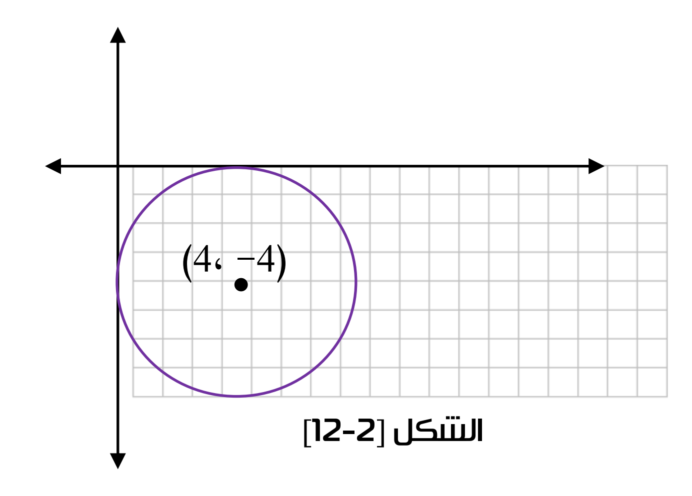
جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الاحداثيين ومركزها (4، −4)

الحل:

الدائرة تمس المحورين ← $r = 4$

معادلة الدائرة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$$



الشكل [2-12]

مثال 10

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الاحداثيين وتقع في الربع الثالث ونصف قطرها (5) وحدات

الحل:

الدائرة تمس المحورين الاحداثيين وتقع في الربع الثالث

المركز $(-5 , -5) = (-r , -r)$

معادلة الدائرة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$$

مثال 11

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الإحداثيين عند النقطتين

(3، 0) ، (0 ، 3)

الحل

الدائرة تمس المحورين

ونقطة التماس (0 ، k) او (h ،0) ← (3، 0) ، (0,3)

$h=3 \quad , k=3 \quad , \quad r=3$

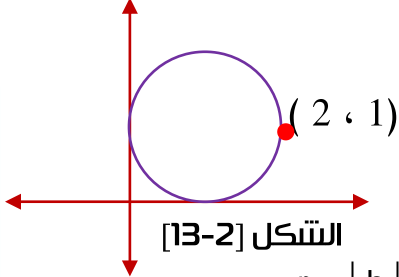
معادلة الدائرة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

مثال 12

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الإحداثيين وتمر بالنقطة (2، 1)

الحل:



الشكل [2-13]

الدائرة تمس المحورين ← $r = |h| = |k|$

معادلة الدائرة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$$

$$4-4r+r^2 + 1-2r + r^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-5)(r-1)=0 \quad \rightarrow r=5 \quad \text{or} \quad r=1$$

$r=5$ تهمل لا يتفق مع شرط المسألة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

[6 – 2] المعادلة العامة للدائرة

الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:
يستنتج معادلة الدائرة العامة من تبسيط المعادلة القياسية

معادلة الدائرة بصورتها العامة ناتجة من تسهيل المعادلة القياسية:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$X^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

رتب:

$$X^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

وإذا فرضنا أن:

$$a=-2h \quad , \quad b=-2k \quad , \quad c = h^2 + k^2 - r^2$$

تصبح المعادلة بالشكل:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

لاحظ أن:

$$h = \frac{-a}{2} \quad , \quad k = \frac{-b}{2} \quad , \quad r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$$



ملاحظات

من المعادلة العامة للدائرة نلاحظ أن:

- معادلة من الدرجة الثانية للمتغيرين x ،y
- معامل x^2= معامل y^2 (الأفضل أن يكون 1)
- المعادلة خالية من الحد xy
- $r > 0$

مثال 13

جد إحداثيات مركز ونصف قطر الدائرة:

$$2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 6 = 0$$

الحل:

نجعل معامل x^2= معامل y^2= 1 بقسمة المعادلة على 2

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$$

بالمقارنة مع المعادلة $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$h = \frac{-a}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad , \quad k = \frac{-b}{2} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

المركز = (2 ، 3 −)

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 - (3)} = \sqrt{10}$$

مثال 14

دائرة معادلتها $x^2 + y^2 - 8x + 10y + c = 0$

ونصف قطرها = 7 جد قيمة c

الحل

بالمقارنة مع المعادلة $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$h = \frac{-a}{2} = \frac{-(-8)}{2} = 4 \quad , \quad k = \frac{-b}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} \rightarrow 7 = \sqrt{(4)^2 + (-5)^2 - c}$$

ربع الطرفين

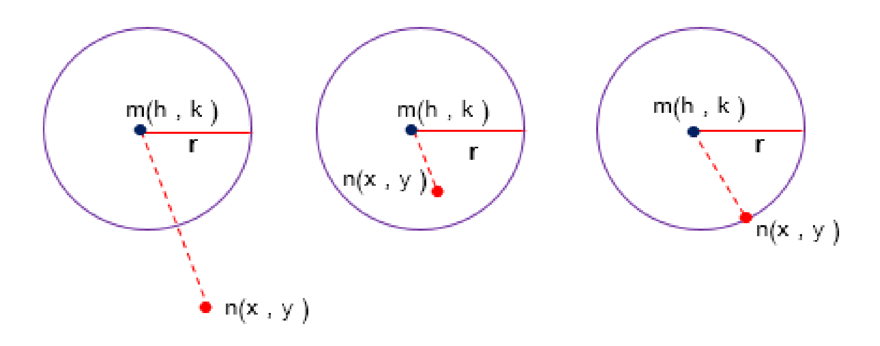
$$49 = 41 - c \rightarrow c = -8$$



علاقة النقطة (x ،y) بالدائرة

الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادراً على أن:
يوضح علاقة نقطة بالدائرة





$mn = r$	$mn < r$	$mn > r$
النقطة تقع على الدائرة	النقطة داخل الدائرة	النقطة خارج الدائرة

الشكل [2-14]

الطريقة الأولى:

نعوض النقطة في معادلة الدائرة فإذا كان:

1) الطرف الأيسر = الطرف الأيمن فالنقطة تقع على محيط الدائرة
2) الطرف الأيسر أقل من الطرف الأيمن فالنقطة تقع داخل الدائرة
3) الطرف الايسر أكبر من الطرف الأيمن فالنقطة تقع خارج الدائرة

الطريقة الثانية:

نجد البعد(s) بين المركز (h , k) والنقطة (x , y) فإذا كان :

1) $s = r$ فالنقطة تقع على محيط الدائرة
2) $s < r$ فالنقطة تقع داخل الدائرة
3) $s > r$ فالنقطة تقع خارج الدائرة

مثال 15

لتكن $x^2+y^2=36$ معادلة الدائرة بين موقع النقطة $(4 ، -3)$
فيما إذا كانت النقطة تنتمي للدائرة أو تقع خارج الدائرة أو داخل الدائرة

الحل:

الطريقة الأولى :

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (4)^2 + (-3)^2 = 25$$

الطرف الأيسر أقل من الطرف الأيمن ، النقطة تقع داخل الدائرة.

الطريقة الثانية :

$$r^2 = 36 \quad \rightarrow r = 6$$

نجد البعد بين المركز $(0 ، 0)$ والنقطة $(4 ، -3)$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2}$$

$$S = \sqrt{25} = 5$$

نلاحظ أن $s < r$ فالنقطة تقع داخل الدائرة

نشاط

لتكن $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ معادلة الدائرة

بين موقع النقطة $(2 ، 1)$

فيما إذا كانت النقطة تنتمي للدائرة أو تقع خارج الدائرة أو داخل الدائرة

[2 – 8] علاقة مستقيم بالنسبة للدائرة



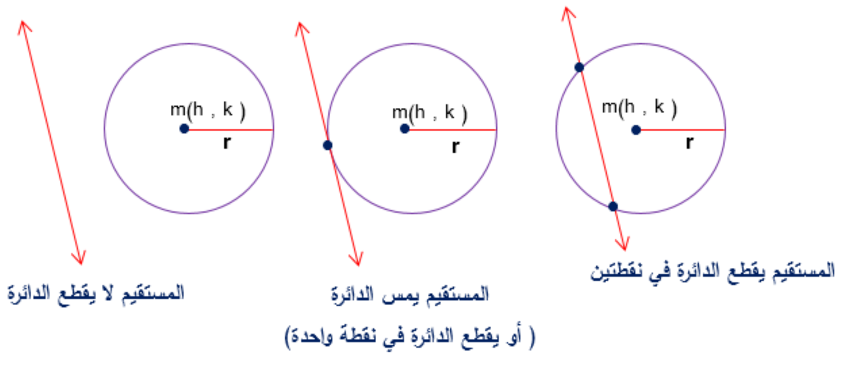
الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادراً على أن:
يوضح علاقة مستقيم بالدائرة

علاقة مستقيم بالنسبة للدائرة إما أن يكون المستقيم:

❶ قاطعاً للدائرة في نقطتين

❷قاطعاً للدائرة في نقطة واحدة (مماس للدائرة)

❸غير قاطع للدائرة (خارج الدائرة)



الشكل [2-15]

لتحديد كل وضع من الأوضاع السابقة

✍تعيين مركز الدائرة وطول نصف قطرها

✍إيجاد بعد مركز الدائرة عن المستقيم
ثم نقارن هذا البعد بنصف القطر للدائرة فاذا كان:

① البعد أقل من نصف القطر فالمستقيم قاطع للدائرة بنقطتين

② البعد = نصف القطر فالمستقيم قاطع للدائرة من نقطة واحدة هي نقطة التماس (فهو مماس للدائرة)

③ البعد أكبر من نصف القطر فالمستقيم خارج الدائرة

مثال 16

بين علاقة المستقيم $x-y+2=0$ بالنسبة للدائرة التي معادلتها:

$$x^2+y^2+4x+2y+1=0$$

الحل:

بالمقارنة مع المعادلة $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$h=\frac{-a}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \quad , k=\frac{-b}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

المركز = $(-2 \text{ ، } -1)$

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2-(1)}=\sqrt{4}=2$$

نجد المسافة بين المستقيم $x-y+2=0$ ومركز الدائرة $(-2,-1)$

$h=-2 , k=-1 \qquad a=1 , b=-1 , c=2$

$$d=\frac{|a.h+b.k+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\times(-2)+(-1)\times(-1)+2|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}$$

$$d=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

المستقيم قاطعاً للدائرة لان $r>d$

[2 – 9] معادلة مماس الدائرة عند نقطة



الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادراً على أن:
يجد معادلة مماس الدائرة عند نقطة معلومة

لإيجاد معادلة مماس الدائرة

نجد ميل القطر المار بنقطة التماس = m

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

نجد ميل المماس العمود على r المار بنقطة التماس **M العمود** = $\frac{-1}{m}$

معادلة المماس هي معادلة المستقيم على الصورة: $ax+by+c=0$

وهي $(y-y_1)=M\,(x-x_1)$

مثال 17

جد معادلة مماس الدائرة $x^2+y^2=5$ عند النقطة (2 ، 1)

الحل:

المركز م (0 ، 0) ونصف القطر $r=\sqrt{5}$

نجد الميل بين المركز (0 ، 0) والنقطة (2 ، 1)

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{1-0}=2$$

$$M_{\text{العمود}}=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{2}$$

معادلة مماس الدائرة هي:

$$(y-y_1)=M\,(x-x_1)\ \rightarrow\ (y-2)=\frac{-1}{2}(x-1)$$

$$\rightarrow 2y-4=-x+1\ \rightarrow\ x+2y-5=0$$

تمارين (2 - 1)

س1) جد معادلة الدائرة لكلٍّ ممّا يأتي:

1) مركزها (3، 4) وقطرها يساوي 10 وحدات

2) تمس المحورين على بعد 3 وحدات من نقطة الأصل

3) تمس المحور السيني ومركزها (−4 ، 0)

4) مركزها النقطة (2 ،−1) وتمر بالنقطة (0 ، −2)

5) نهايتها أحد أقطارها النقطتان (3 ، 4) ، (−1 ، 2)

س2) جد إحداثيات المركز ونصف القطر مع رسم الدائرة لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $x^2 + y^2 + 6y = 0$

2) $3x^2 + 3y^2 - 18x - 24y = 81$

س3) جد معادلة الدائرة التي مركزها (2 ، −1) وتمس المستقيم

$12x + 5y + 7 = 0$

س4) جد معادلة المماس والعمودي على المماس للدائرة $x^2 + y^2 = 13$

عند $y = 2$

س5) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (1 ، −2) وتمس مستقيم

عند النقطة (3 ، 4).

[2- 10] القطع المكافئ



الهدف من الدرس **أن يكون الطالب قادراً على أن:**

1) يُعرف مفهوم القطع المكافئ
2) يجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت بؤرتاه تنتمي لمحور السينات أو تنتمي لمحور الصادات

مقدمة

إن القطوع المكافئة مهمة وذلك لتطبيقاتها العديدة في العالم الفيزيائي فإذا أطلقت قذيفة تحت تأثير الجاذبية الأرضية فإنه يمكننا أن نثبت أن مسارها هو قطع مكافئ وذلك إذا أهملنا مقاومة الهواء والعوامل الأخرى. وتفيد خواص القطع المكافئ في صناعة المراصد الفلكية والكشافات الضوئية وكذلك تفيد

في الرادار وهذه بعض من تطبيقات القطوع المكافئة.



الشكل [2-16]

تعريف القطع المكافئ

هو مجموعة النقط التي تقع في مستوى واحد وعلى أبعاد متساوية من نقطة ثابتة F تسمى البؤرة ومن خط مستقيم معين D يسمى الدليل يقعان في المستوى نفسه.

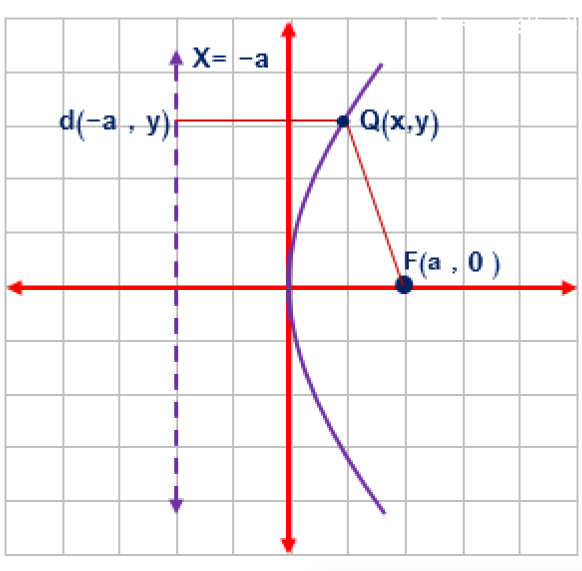
توضيح التعريف :

لتكن مجموعة النقط $Q(x , y)$ في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(a ، 0)$ تسمى البؤرة حيث أن $a > 0$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل لا يحوي البؤرة ويرمز له بـ $\overleftrightarrow{D}$

أي إن: $\overline{QF} = \overline{Qd}$

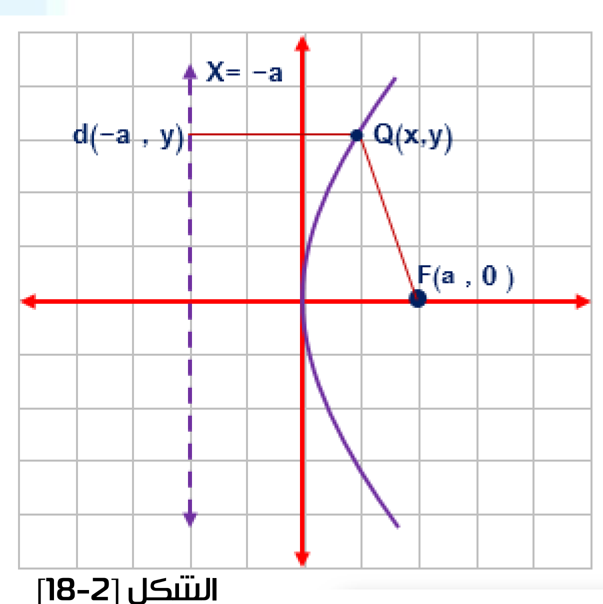
ويسمى المستقيم المار بالبؤرة والعمود على الدليل بمحور القطع المكافئ

أي إن: $\frac{QF}{Qd} = 1$ ويسمى الاختلاف المركزي



الشكل [2-17]

﴿اشتقاق معادلة القطع المكافئ الذي رأسه في نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور السينات ﴾ الاشتقاق للاطلاع فقط



الشكل [2-18]

لتكن النقطة $F(a ، 0)$ هي بؤرة القطع المكافئ والمستقيم $x=-a$ موازٍ لمحور الصادات ولتكن $Q(x,y)$ من نقط القطع المكافئ وليكن $\overline{Qd} \perp \overleftrightarrow{D}$

ومن تعريف القطع المكافيء $\overline{QF} = \overline{Qd}$

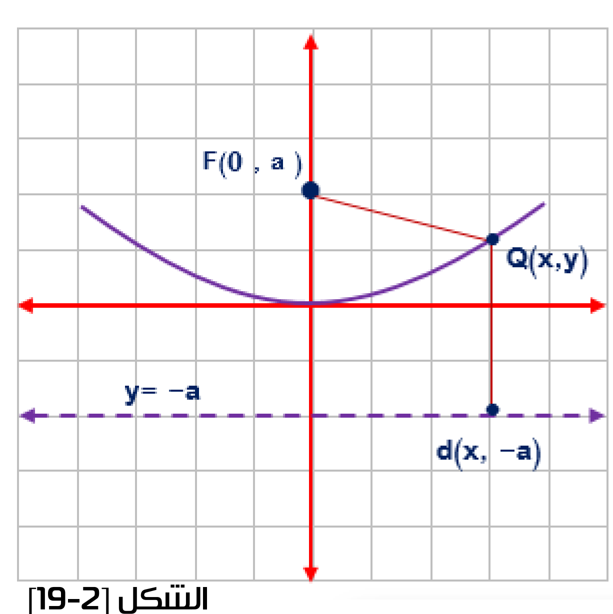
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين وفتح الأقواس

$$X^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2 \rightarrow y^2 = 4ax$$

$y^2 = 4ax$ تمثل معادلة قطع مكافئ رأسه في نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور السينات

اشتقاق معادلة القطع المكافئ الذي رأسه في نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور الصادات



الشكل [2-19]

لتكن النقطة $F(0 ، a)$ هي بؤرة القطع المكافئ والمستقيم $y=-a$ موازٍ لمحور السينات ولتكن $Q(x,y)$ من نقط القطع المكافئ وليكن $\overline{Qd} \perp \overleftrightarrow{D}$

ومن تعريف القطع المكافيء $\overline{QF} = \overline{Qd}$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+a)^2}$$

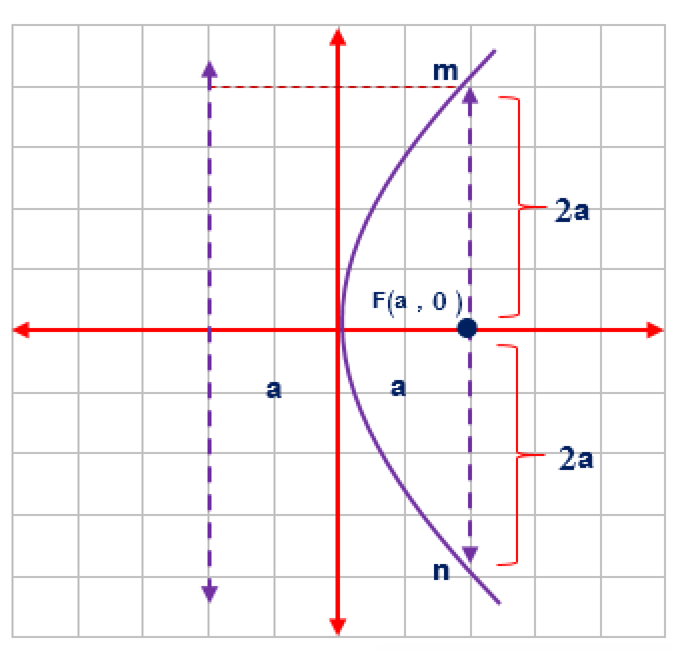
بتربيع الطرفين وفتح الأقواس

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2 \rightarrow x^2 = 4ay$$

$x^2 = 4ay$ تمثل معادلة قطع مكافئ رأسه في نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور السينات

الوتر البؤري للقطع المكافئ

هو مستقيم عمودي على محور القطع المكافئ ماراً بالبؤرة

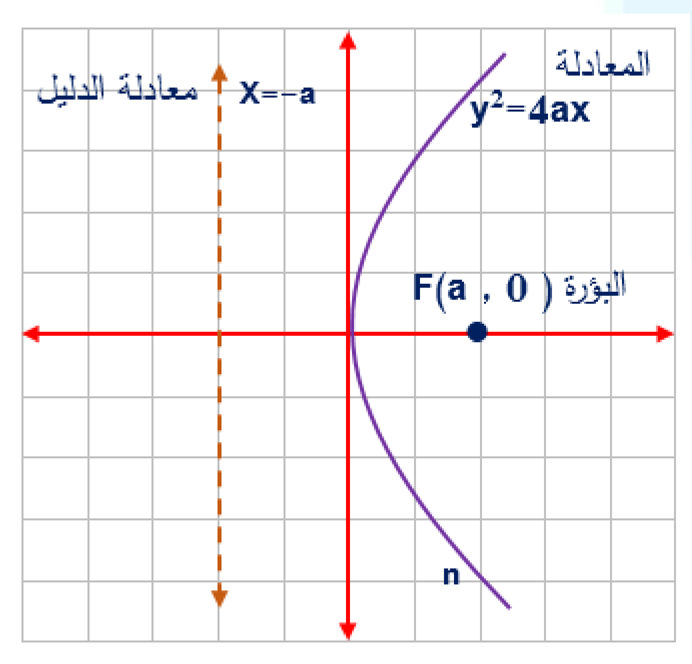


الشكل [2-20]

الوتر البؤري للقطع المكافئ $\overline{mn} = 4a$

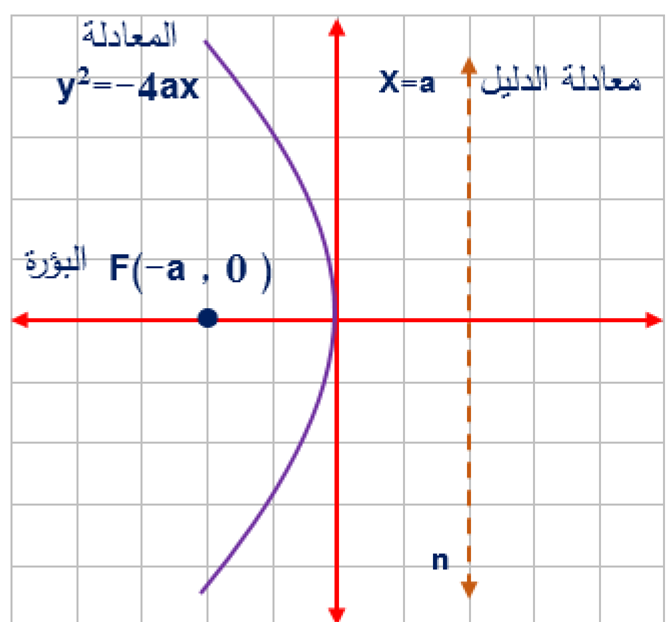
ملخص لحالات معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل



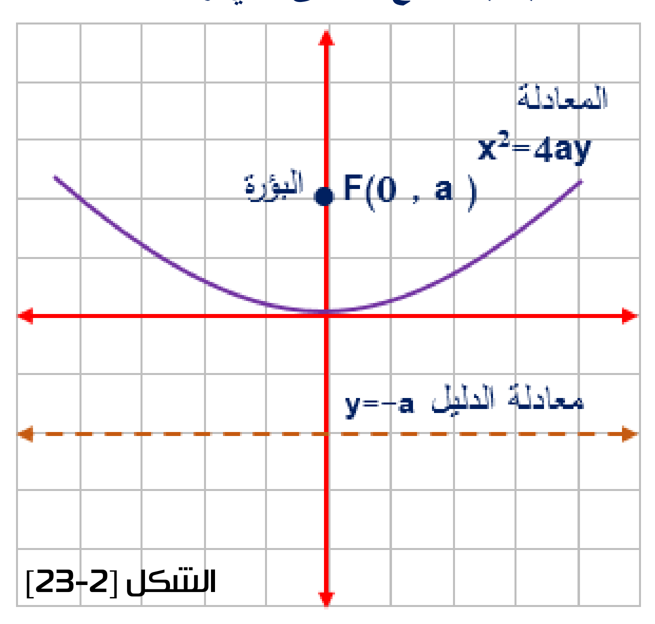
الشكل [2-21]

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل



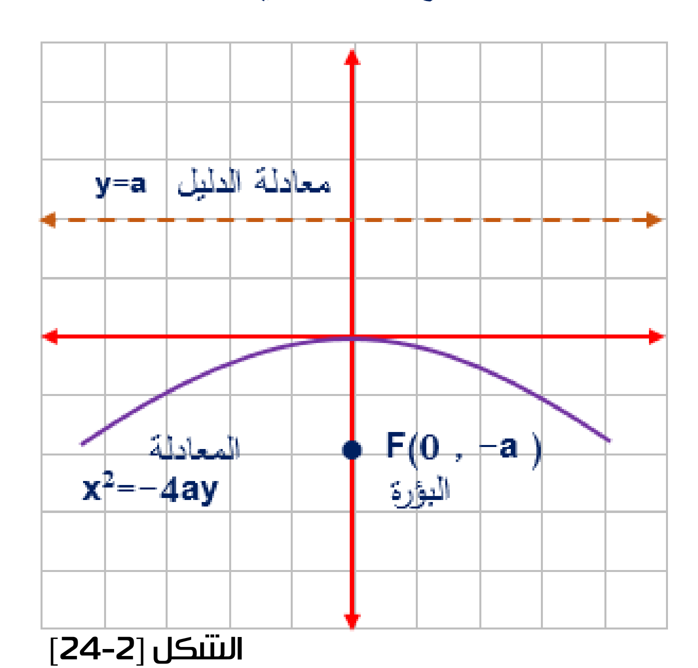
الشكل [2-22]

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل



الشكل [2-23]

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل



الشكل [2-24]

مثال 18

جد إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $x^2 = -8y$

الحل: مقارنةً بمعادلة القطع المكافئ $x^2 = -4ay$

$-4a = -8 \rightarrow a = 2$

البؤرة $F(0, -a) \rightarrow F(0, -2)$

معادلة الدليل $y = a = 2$

مثال 19

جد إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $y^2 = 4x$

ثم ارسمه بيانياً.

الحل: مقارنةً بمعادلة القطع المكافئ $y^2 = 4ax$

$4a = 4 \rightarrow a = 1$

البؤرة $F(a, 0) \rightarrow F(1, 0)$

معادلة الدليل $x = -a = -2$

نحتاج نقاطاً إضافية

x	0	1
y	0	±2

الشكل [2-25]

مثال 20

جد معادلة القطع المكافئ إذا علم:

أ) وتره البؤري =12 وبؤرته تقع على محور الصادات السالب

أ) بؤرته (0 ، 5) والراس نقطة الأصل.

ب) معادلة الدليل $y-1=0$ ورأسه نقطة الأصل.

الحل:

أ) الوتر البؤري =4a

$4a=12 \rightarrow a=3$

$X^2=-4ay \rightarrow x^2=-12y$

ب) نحصل على $a=5$ ونعوض في المعادلة $y^2=4ax$

$y^2 = 20x$

جـ) من معادلة الدليل $y=1 \rightarrow a=1$

$X^2=-4ay \rightarrow x^2=-4y$

مثال 21

جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته نقطة تقاطع المستقيم $3x + 2y + 6=0$ مع محور الصادات.

الحل

نجد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات $\leftarrow$ $x=0$

$3(0)+2y+6=0 \rightarrow y=-3 \rightarrow (0 , -3) \rightarrow a=3$

$X^2 = -4ay \rightarrow x^2 = -12y$

مثال 22

قطع مكافئ يمر بالنقطتين $(1\ ,\ 2\sqrt{6}\ )\ ,\ (\ 1\ ,\ -2\sqrt{6}\ )$
والرأس نقطة الأصل جد البؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة هذا القطع.

الحل:

النقطتين متناظرتين حول محور السينات:

فتكون المعادلة $y^2=4ax$ ، نعوض $x=1\ ,\ y=2\sqrt{6}$

$$y^2=4ax \rightarrow (2\sqrt{6})^2=4a(1) \rightarrow 24=4a \rightarrow a=6$$

البؤرة $F(6\ ،\ 0)$

معادلة الدليل $x=-6$

معادلة القطع المكافئ $y^2=4ax \rightarrow y^2=4(6)x \rightarrow y^2=24x$

مثال 23

جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (5- ، 3) والرأس في نقطة الأصل

الحل:

يوجد احتمالان للمعادلة القياسية لعدم تحديد موقع البؤرة

الاحتمال الأول:

البؤرة تنتمي لمحور السينات ← معادلة الدليل $x=3 \rightarrow a=3$

$$y^2=-4ax \rightarrow y^2=-12x$$

الاحتمال الثاني:

البؤرة تنتمي لمحور الصادات ← معادلة الدليل $y=-5 \rightarrow a=5$

$$x^2=4ay \rightarrow x^2=20y$$

مثال 24

جد معادلة الدائرة التي مركزها بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته

$y^2=-20x$ ونصف قطرها = 4وحدات

الحل)

$$y^2=-4ax \quad \rightarrow -4a=-20 \quad \rightarrow \quad a=5$$

بؤرة القطع المكافئ $F(-5 ، 0)$ وتمثل مركز الدائرة

معادلة الدائرة

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \rightarrow \quad (x+5)^2+(y-0)^2=16$$

مثال 25

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بمركز الدائرة

$X^2+y^2-4x+2y=0$ وبؤرته تقع على محور الصادات .

الحل:

$$h=\frac{-a}{2}=\frac{4}{2}=2 \quad , k=\frac{-b}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

المركز = $(2 ، -1)$

القطع المكافئ يمر بمركز الدائرة $(2 ، -1)$

$$x^2=-4ay \rightarrow (2)^2=-4a(-1) \quad \rightarrow a=1$$

$$x^2=-4ay \quad \rightarrow \quad x^2=-4(1)y \quad \rightarrow x^2=-4y$$

مثال 26

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ إذا علم أن بؤرته $(-3 ، 0)$
والرأس في نقطة الأصل.

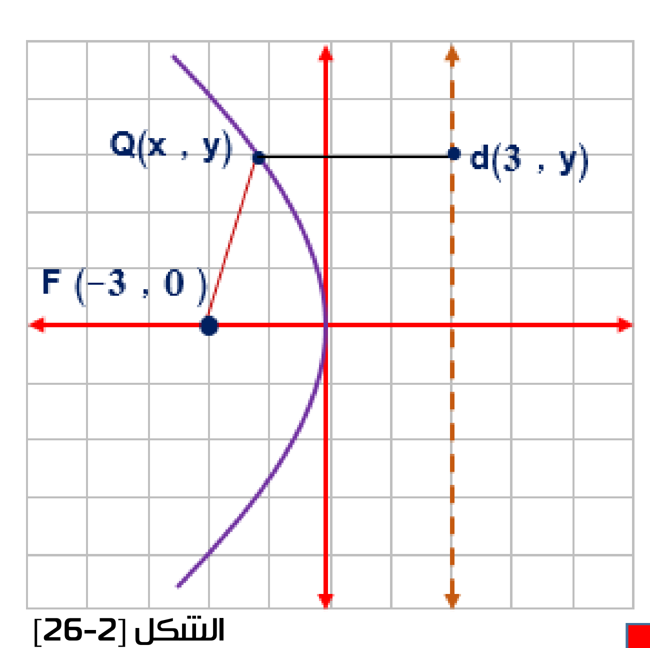
الحل

لتكن $Q(x,y)$ تنتمي للقطع المكافئ

$$\overline{QF} = \overline{Qd}$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-y)^2}$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow y^2 = -12x$$



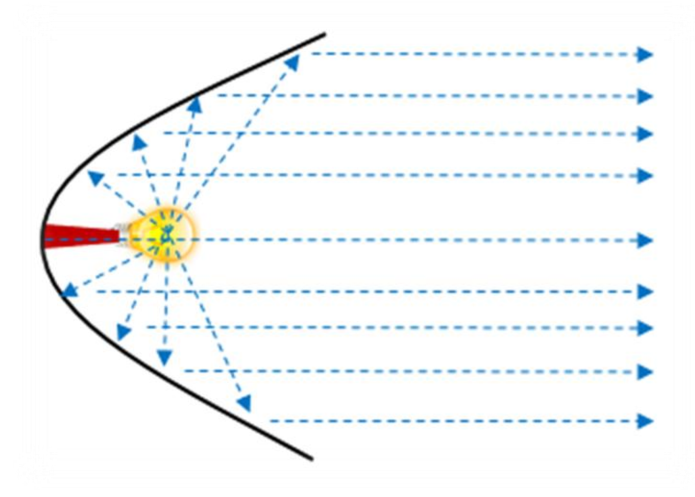
الشكل [26-2]

نشاط

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ إذا علم أن بؤرته $(9 ، 0)$
والرأس في نقطة الأصل.

تطبيق عملي

نأخذ سطحا بشكل قطع مكافئ مصقولا من الداخل ويدور حول محوره ونضع في بؤرته مصباح ضوئي فإن جميع الاشعة المنعكسة تكون موازية لمحور القطع المكافئ.



الشكل [2-27]



[2−11] انسحاب المحاور للقطع المكافئ

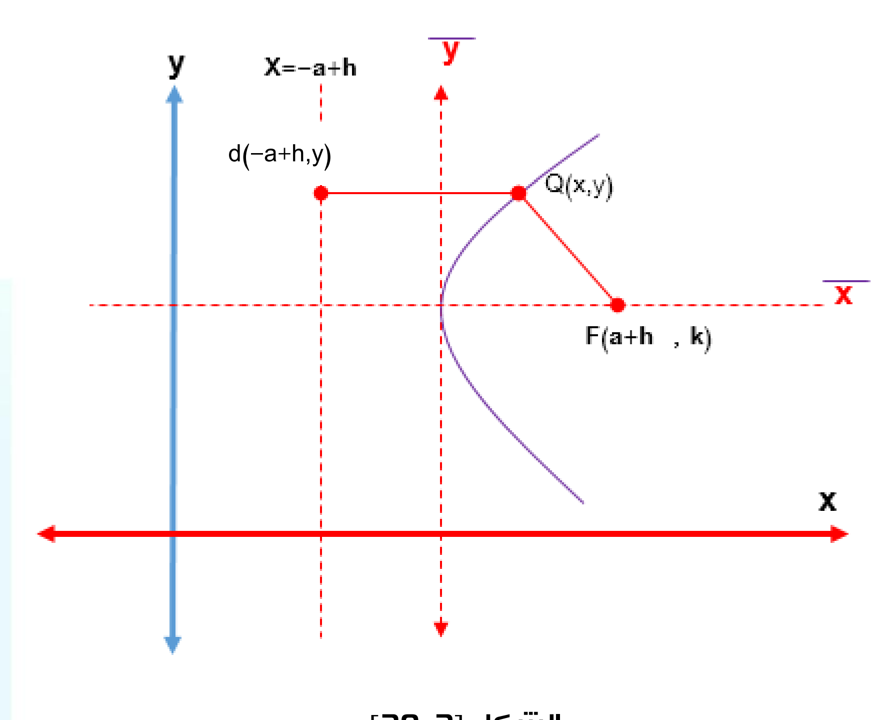


الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:
يجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (h , k) ومحوره يوازي محور السينات أو محور الصادات

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد المحورين الإحداثيين ورأسه النقطة (h , k)

لتكن النقطة (h , k) رأس القطع المكافئ والنقطة $F(a+h , k)$ بؤرته ومعادلة دليله $x=-a+h$



الشكل [2-28]

ومن تعريف القطع المكافئ $\overline{QF} = \overline{Fd}$

$$\sqrt{(x-a-h)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(x+a-h)^2 + (y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين وفتح الأقواس نحصل على:

المعادلة القياسية	$(y-k)^2 = 4a(x-h)$

معادلة قطع مكافئ بؤرته تقع على محور يوازي محور السينات

إحداثي الرأس $(h ، k)$

إحداثي البؤرة $F(a+h ، k)$

معادلة الدليل $x=-a+h$

معادلة المحور $y=k$

وبنفس الطريقة نجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تقع على محور الصادات وهي

المعادلة القياسية	$(x-h)^2 = 4a(y-k)$

إحداثي الرأس $(h ،k)$

إحداثي البؤرة ب $(h ، a+k)$

معادلة الدليل $y=-a+k$

معادلة المحور $x=h$

حالات المعادلة القياسية للقطع المكافئ

الذي محوره يوازي أحد المحورين الإحداثيين ورأسه النقطة $(h ، k)$

- محور القطع المكافئ يوازي محور السينات

المعادلة القياسية $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

البؤرة بعد الانسحاب $F(a+h , k)$

ومعادلة الدليل بعد الانسحاب $x = -a + h$

المعادلة القياسية $(y-k)^2 = -4a(x-h)$

وإحداثي البؤرة بعد الانسحاب $F(-a+h , k)$

ومعادلة الدليل بعد الانسحاب $x = a+h$

- محور القطع المكافئ يوازي محور الصادات

المعادلة القياسية $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

البؤرة بعد الانسحاب $F(h , a+k)$

معادلة الدليل بعد الانسحاب $y = -a+k$

المعادلة القياسية $(x-h)^2 = -4a(y-k)$

البؤرة بعد الانسحاب $F(h , -a+k)$

معادلة الدليل بعد الانسحاب $y = a+k$

مثال 27

من معادلة القطع المكافئ $(y+1)^2 = 4(x-2)$

جد الرأس، البؤرة، معادلة المحور، معادلة الدليل.

الحل:

مقارنةً مع المعادلة القياسية

المعادلة القياسية $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

$K = -1 \quad , \quad h = 2 \quad , \quad 4a = 4 \quad \rightarrow \quad a = 1$

الرأس $(h , k) = (2 , -1)$

البؤرة $F(a+h , k) = F(1+2 , -1) = F(3 , -1)$

معادلة الدليل $x = -a+h = -1+2 = 1$

معادلة المحور $y = k = -1$

مثال 28

من معادلة القطع المكافئ $x^2 - 4y = 6x - 5$

جد الرأس، البؤرة، معادلة المحور، معادلة الدليل.

الحل:

نرتب المعادلة $x^2 - 6x = 4y - 5$

نضيف للطرفين مربع نصف معامل x

$x^2 - 6x + 9 = 4y - 5 + 9$

$(x-3)^2 = 4y+4 \quad \rightarrow \quad (x-3)^2 = 4(y+1)$

مقارنةً مع المعادلة القياسية

$(x-h)^2 = 4a(y-k)$

$h=3 \quad , \quad k=-1 \quad , \quad 4a=4 \rightarrow a=1$

الرأس $(h , k) = (3 , -1)$

البؤرة $F(h , a+k) = F(3 , 1-1) = F(3 , 0)$

معادلة الدليل $y = -a+k = -1 -1 = -2$

معادلة المحور $x=h=3$

مثال 29

من معادلة القطع المكافئ $y^2 = x-1$

جد الرأس، البؤرة، معادلة المحور، معادلة الدليل.

الحل:

$(y-0)^2 = 1(x-1)$

المعادلة القياسية $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

$h=1 \quad , \quad k=0 \quad , \quad 4a=1 \rightarrow a=\frac{1}{4}$

الرأس $(h , k) = (1 , 0)$

البؤرة $F(a+h , k) = F(\frac{1}{4}+1 , -1) = F(\frac{5}{4} , -1)$

معادلة الدليل $x = -a+h = -\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$

معادلة المحور $y=0$

تمارين (2-2)

س1) جد المعادلة للقطع المكافئ في كل ممّا يأتي
ثم ارسم المنحني البياني لها:

أ) بؤرته مركز الدائرة $(x-3)^2+(y+2)^2=17$

ب) معادلة الدليل $16x+1=0$ والرأس نقطة الاصل.

س2) في كل ممّا يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ:

أ) $2x+16y^2=0$

ب) $y^2=-4(x-2)$

جـ) $x^2+4x+2y=6$

د) $y^2+8x-6y+17=0$

س3) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطة $(2 , 5)$
والرأس نقطة الأصل.

س4) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(1 ، \sqrt{3})$ ، $(1 ، -\sqrt{3})$

س5) جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة $(-3 ، 2)$

س6) باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي
معادلة الدليل $x= 2\sqrt{2}$ والراس نقطة الاصل.

س8) جد معادلة القطعين المكافئين اللذين يتقاطع دليلهما بالنقطة $(-3 ، 7)$
ورأسيهما في نقطة الأصل.

س9) جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بمركز الدائرة
$y^2+x^2-6x-8y=27$

[2 - 12] القطع الناقص

الهدف من دراسة القطع الناقص



أن يكون الطالب قادراً على أن :

1) يعرف القطع الناقص
2) يجد معادلة ومساحة ومحيط القطع الناقص
3) يرسم القطع الناقص

من المعروف أن مدارات الكواكب في النظام الشمسي هي قطوع ناقصة تقع الشمس في احد بؤرتيها فهذه واحدة من التطبيقات المهمة للقطوع الناقصة.

تعريف القطع الناقص

هو مجموعة كل النقاط في مستوى معين التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً.

توضيح التعريف

لتكن بؤرتا القطع الناقص هما $F_1(c, 0)$ ، $F_2(-c, 0)$ والعدد الثابت هو $2a$ حيث أن $a>0$ ، $c>0$ ويسمى المستقيم المار بالبؤرتين بالمحور البؤري ويقطع القطع الناقص في نقطتين تسميان رأسي القطع وتسمى قطعة المستقيم الواصلة بين الرأسين بالمحور الكبير وطولها ($2a$) أيضاً ويساوي مجموع بعدي أي نقطة $Q(x , y)$ من نقاط القطع الناقص عن البؤرتين أي أن : $QF_1 + QF_2 = 2a$

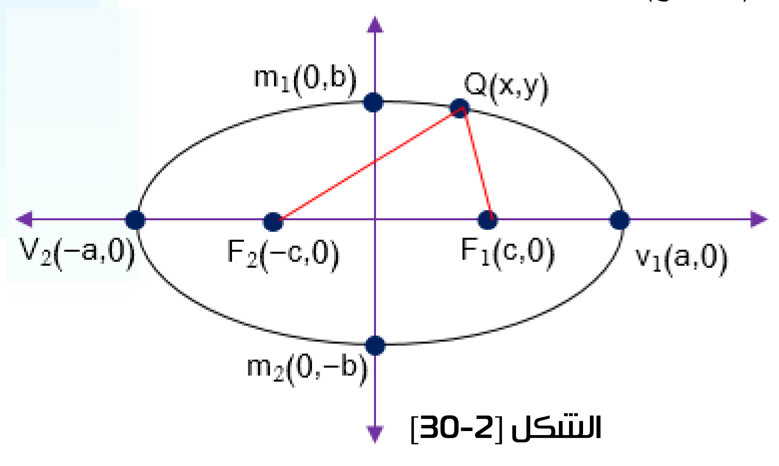
وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع المستقيم العمود على المحور الكبير من مركز القطع الناقص مع القطع الناقص بالمحور الصغير وطولها ($2b$) حيث $b>0$ ونهاياته تسميان القطبين .



الشكل [2-29]



اشتقاق معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل (للاطلاع)



الشكل [2-30]

$$QF_1 + QF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$

بتربيع الطرفين والتسهيل ينتج:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الرأسان $V(\pm a , 0)$

البؤرتان $F(\pm c , 0)$

القطبان $m(0 , \pm b)$

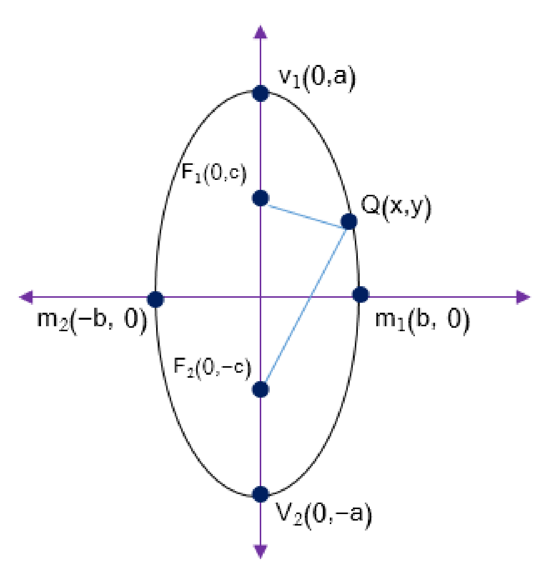
معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل

$$\frac{X^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

الرأسان $V\ (0\ ,\ \pm a\ )$

البؤرتان $F\ (0\ ,\ \pm c\ )$

القطبان $m\ (\pm b\ ,\ 0\ )$



الشكل [2-31]

ملاحظات

1) العلاقة $c^2 = a^2 - b^2$

2) مساحة القطع الناقص $A = ab\pi$

3) محيط القطع الناقص $p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

4) الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

مثال 30

جد إحداثيي الرأسين والبؤرتين وطول المحورين والمسافة بين البؤرتين والاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته

ثم ارسمه $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

الحل:

مقارنة بالمعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **نحصل على:**

الرأسين $a^2=25 \rightarrow a=5 \rightarrow (5,0)\ ,\ (-5\ ,\ 0)$

القطبين $b^2=16 \rightarrow b=4 \rightarrow (0,4)\ ,\ (0\ ,\ -4)$

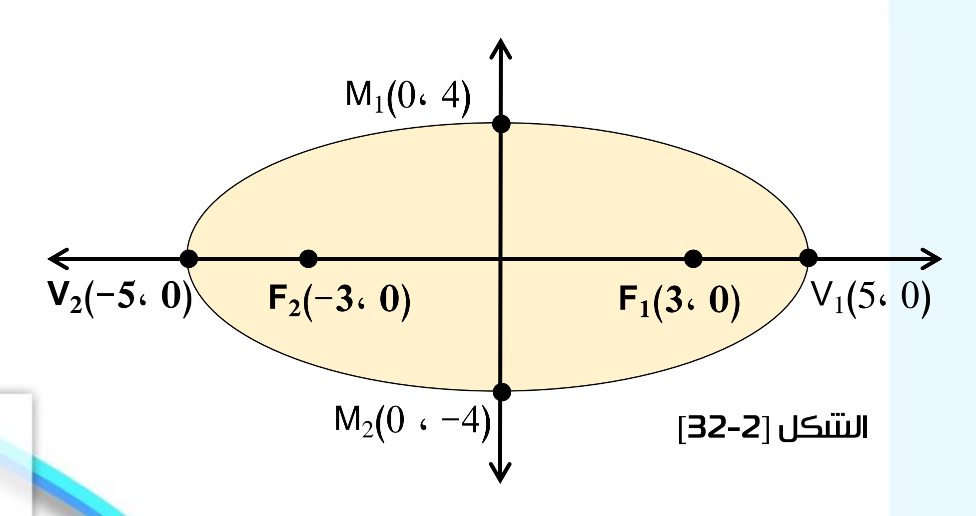
البؤرتين $c^2=a^2-b^2 \rightarrow c^2=9 \rightarrow c=3 \rightarrow (3,0)\ ,\ (-3\ ,\ 0)$

المسافة بين البؤرتين $2c=6$

طول المحور الكبير $2a=10$

طول المحور الصغير $2b=8$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$



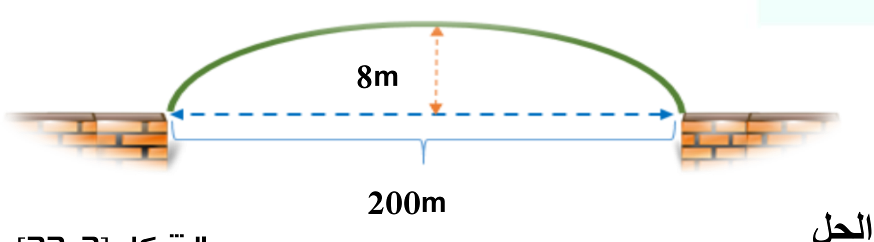
الشكل [2-32]

مثال 31

بني جسر مقوس على شكل نصف قطع ناقص في إحدى مناطق ولاية الرقة ، فإذا كان طول قاعدة الجسر 200m وأعلى نقطة في القوس فوق الطريق الأفقية 8m ، جد :

1) طول الجسر المقوس

2) البعد بين بؤرتي القطع الناقص



الشكل [2-33]

الحل

$$2a=200 \rightarrow a=100 \rightarrow a^2=10000$$

$$2b=8 \rightarrow b=4 \rightarrow b^2=16$$

1) طول قوس الجسر = نصف محيط القطع الناقص =

$$\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \pi\sqrt{\frac{10000+16}{2}} = \pi\sqrt{5008}\ m$$

2) $c^2 = a^2 - b^2 = 10000 - 16 = 9084 \rightarrow c = \sqrt{9084}$

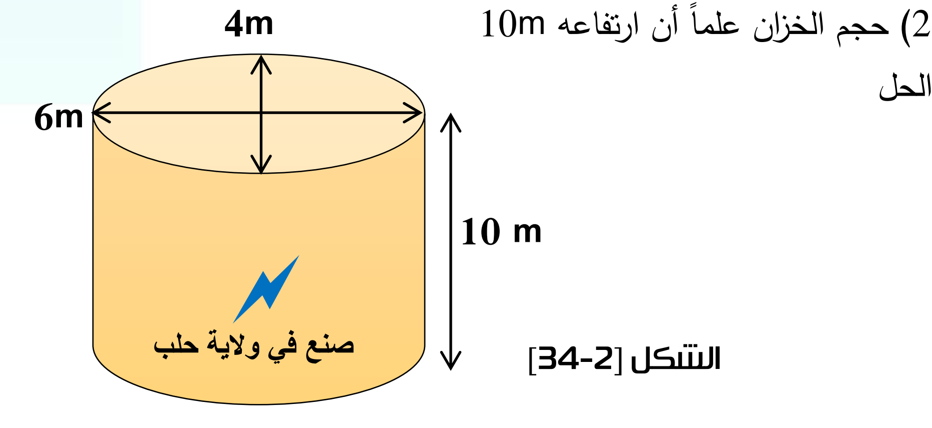
البعد بين البؤرتين $2c = 2\sqrt{9084}$

مثال 32

في أحد المصانع التابعة لولاية حلب (مصنع الفتح لتصنيع الخزانات الكبيرة)
يتم صناعة خزان وقود قاعدته بشكل قطع ناقص أبعادها
4m , 6m أحسب:

1) مساحة ومحيط القاعدة
2) حجم الخزان علماً أن ارتفاعه 10m

الحل



الشكل [2-34]

1)

$2a=6 \rightarrow a=3 \rightarrow a^2=9$

$2b=4 \rightarrow b=2 \rightarrow b^2=4$

$A = ab\pi \rightarrow A=6\pi \quad m^2$

محيط القاعدة (محيط القطع الناقص)

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{6.5} \quad m$$

3) حجم الخزان = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = 6\pi \times 10 = 60\pi \ m^3$

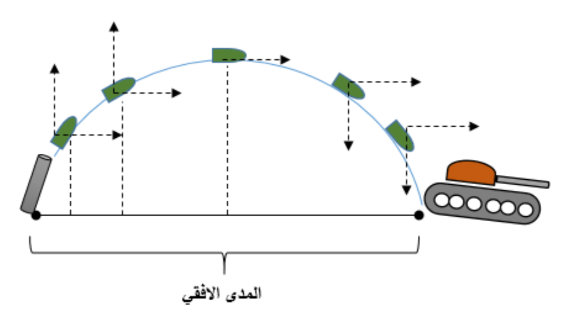
مثال 33

أطلقت قذيفة هاون على مسار بشكل نصف قطع ناقص ووفق المعادلة

$$\frac{x^2}{10000} + \frac{y^2}{900} = 1$$

جد:

1) المدى الأفقي للقذيفة
2) أقصى ارتفاع تصله القذيفة
3) طول القوس الذي سارت عليه القذيفة



الشكل [2-35]

الحل :

$a^2 = 10000 \rightarrow a=100$

$b^2 = 900 \rightarrow b=30$

1) المدى الأفقي للقذيفة $2a = 200$ m

2) أقصى ارتفاع تصله القذيفة $b = 30$ m

3) طول القوس الذي سارت عليه القذيفة = نصف محيط القطع الناقص

$$= \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{10900}{2}} = \sqrt{5450}\ \pi \text{ m}$$

مثال 34

قطع ناقص طول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير جد اختلافه المركزي .

الحل

$$2a = 2(2b) \rightarrow a = 2b \rightarrow a^2 = 4b^2 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \ldots\ldots.(2)$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2) :

$$c^2 = 4b^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 3b^2 \rightarrow c = \sqrt{3}\, b$$

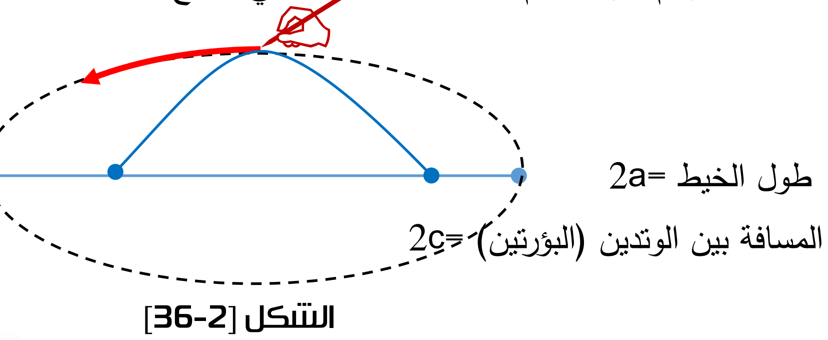
الاختلاف المركزي $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}\, b}{2b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

رسم القطع الناقص عمليا اذا علمت بؤرتاه وطول محوره الكبير

نأخذ خيطاً طوله يساوي طول المحور الكبير للقطع الناقص ونثبت أحد طرفيه في إحدى البؤرتين والطرف الآخر في البؤرة الثانية



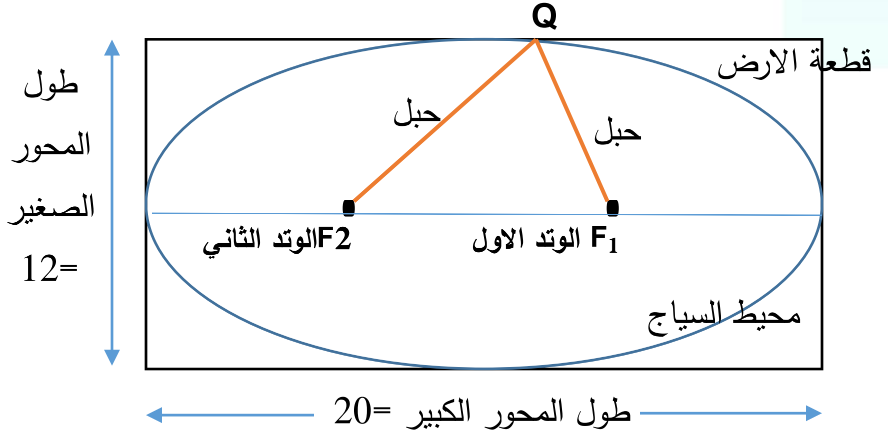
ثم نشد الخيط بقلم رصاص ونحرك القلم بحيث يكون في جميع أوضاعه شاداً للخيط فيرسم طرف القلم الملامس للخيط منحني القطع الناقص.



الشكل [2-36]

مثال 35

أراد أحد مزارعي ولاية دمشق رسم سياج لأرض زراعية مستطيلة الشكل أبعادها 20 ، 12 بحيث يكون شكل السياج قطع ناقص ، أين يدق الوتدين وكم هو طول الحبل الذي سيستخدمه وكم هو محيط هذا السياج ؟



الشكل [2-37]

$$2a=20 \rightarrow a=10 \rightarrow a^2=100 \quad .....(1)$$

$$2b=12 \rightarrow b=6 \rightarrow b^2=36 \quad .....(2)$$

$$C^2=a^2-b^2 \rightarrow c^2=64 \rightarrow c=8$$

موقع الوتدين $c=8$ عن المركز

طول الحبل (وحسب تعريف القطع الناقص) = $2a$

$$\mathbf{2a = 2(10) = 20}$$

محيط السياج (محيط القطع الناقص)

$$= 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{100+36}{2}} = 2\sqrt{68}\ \pi$$

مثال 36

صفيحة مستوية بشكل قطع ناقص مركزها نقطة الأصل والمسافة بين بؤرتيها = 6 وحدات والفرق بين طولي محوريها = 2 وحدة وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات، جد مساحتها واختلافها المركزي ومعادلتها ثم ارسمها

الحل) لرسم القطع الناقص نحتاج قيم a , b , c

$$2c=6 \rightarrow c=3 \rightarrow c^2=9 \qquad ......(1)$$

$$2a-2b=2 \rightarrow a-b=1 \rightarrow a=b+1$$

$$\rightarrow a^2=(b+1)^2 \quad .....(2)$$

$$c^2=a^2-b^2 \rightarrow 9=(b+1)^2-b^2 \rightarrow 9=b^2+2b+1-b^2$$

$$2b=8 \rightarrow b=4 \rightarrow b^2=16$$

نعوض $a=4$ في معادلة (2)

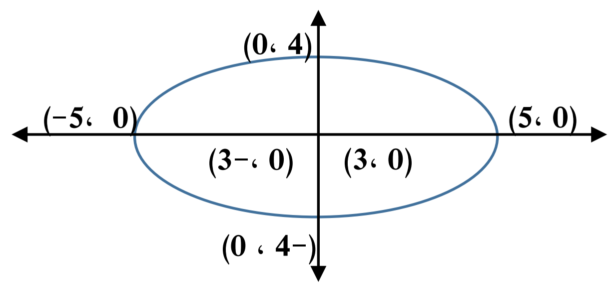
$$a^2=(4+1)^2=25 \rightarrow a=5$$

$$A=ab\pi=20\pi$$

معادلة القطع الناقص

$$\frac{X^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$$

الرأسان $(\pm5 ، 0)$ ، القطبان $(0 ، \pm4)$ ، البؤرتان $(\pm3 ، 0)$



الشكل [2-38]

مثال 37

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2=12x$ و طول محوره الصغير = 10 وحدات.

الحل:

$y^2=12x$ وبالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $y^2=4ax$

$4a=12 \rightarrow a=3$

∴ بؤرتا القطع الناقص $F_1(3 ، 0)$ ، $F_2(-3 ، 0)$

$C=3 \rightarrow c^2=9$ .... (1)

$2b=10 \rightarrow b=5 \rightarrow b^2=25$ ......(2)

$C^2=a^2-b^2 \rightarrow 9=a^2-25 \rightarrow a^2=34$

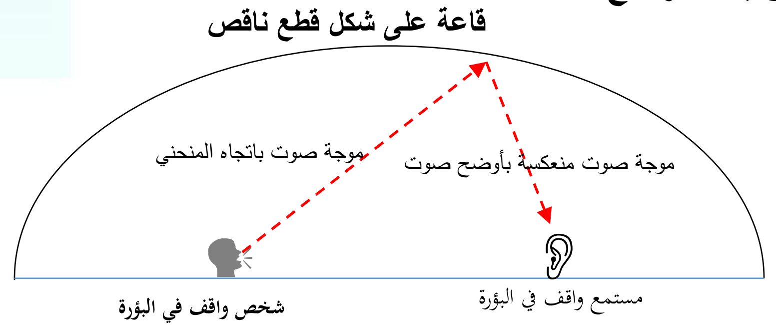
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{34}=1$$

نشاط

دائرة مركزها نقطة الأصل وقطرها 10 وحدات ، رسم داخلها قطع ناقص بحيث طول محوره الكبير ينطبق على قطر الدائرة ، واختلافه المركزي = 0.8 جد معادلة كلّاً من الدائرة والقطع الناقص ثم جد النسبة بين مساحة القطع الناقص ومساحة الدائرة

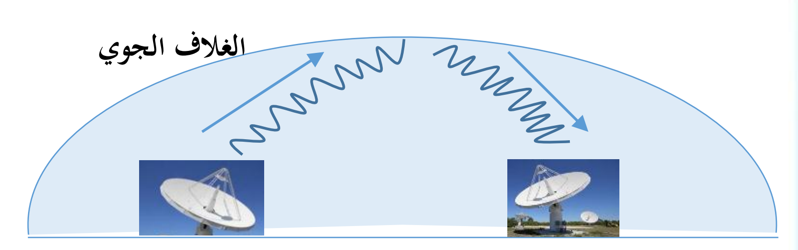


● إذا كان المستمع واقف في بؤرة غرفة على شكل قطع ناقص فإنه يسمع الصوت الصادر من شخص آخر واقف في البؤرة الأخرى للقطع الناقص بشكل واضح



الشكل [2-39]

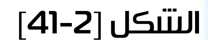
● الغلاف الجوي (طبقة الأوزون) تعكس موجات الاتصال أو الراديو او التلفاز حيث أن محطة الإرسال في بؤرة ومحطة الاستقبال في البؤرة الأخرى



الشكل [2-40]

الشكل (2−45)

● تدور الأرض حول الشمس في قطع ناقص إحدى بؤرتيه هي الشمس (سبحان الله)



الشكل [2-41]

مثال 38

قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وطول محوره الصغير يساوي قطر الدائرة

التي معادلتها $x^2 + y^2 + 6y = 0$ والمسافة بين بؤرتيه = 4 وحدات

وبؤرتاه على محور السينات

الحل

نجد قطر الدائرة $x^2 + y^2 + 6y = 0$

بالمقارنة مع المعادلة $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$h = \frac{-a}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad , \quad k = \frac{-b}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

المركز = $(0 ، -3)$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2 - (0)} = \sqrt{9} = 3$$

القطر = 6

$$2b = 6 \rightarrow b = 3 \rightarrow b^2 = 9$$

$$2c = 4 \rightarrow c = 2 \rightarrow c^2 = 4$$

$$C^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 4 = a^2 - 9 \rightarrow a^2 = 13$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{X^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

[2 – 13] انسحاب المحاور للقطع الناقص

تبين لنا أن مركز القطع الناقص بأنه نقطة تقاطع محوري تناظره فإذا كان المركز عند النقطة (h ،k) والمحوران يوازيان المحورين الإحداثيين فإننا نحصل على معادلة القطع الناقص في الإحداثيات الجديدة كما يأتي:

المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الأكبر يوازي المحور السيني ومركزه النقطة (h ،k)

عند انسحاب مركز القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (0 ، 0) على محور السينات

بمقدار h من الوحدات وبمقدار ك من الوحدات على محور الصادات تصبح المعادلة القياسية للقطع الناقص بالصورة الآتية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

إحداثي الرأسين

$V(\pm a+h\ ,\ k)$

إحداثي القطبين

$M(\ h,\ \pm b+k)$

إحداثي البؤرتين

$F(\pm c+h\ ,\ k)$

المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الأكبر يوازي المحور الصادات ومركزه النقطة (h ،k)

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

إحداثي الرأسين

$V(h\ ,\ \pm a+k)$

إحداثي القطبين

$M(\pm b+h,\ k)$

إحداثي البؤرتين

$F(\ h\ ,\ \pm c+k)$

ملاحظة

سنقتصر في هذا البند[2 -13]على إيجاد مركز القطع الناقص والبؤرتين والرأسين والقطبين وطول المحورين ومعادلة كل من المحورين فقط.

مثال 39

عين كلاً من البؤرتين والراسين والمركز ثم جد طول كل من المحورين للقطع الناقص:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

الحل

مقارنةً بالمعادلة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$(h , k) = (2 , 1)$

$a^2=25 \rightarrow a=5$

$b^2=9 \rightarrow b=3$

$c^2=a^2-b^2 \rightarrow c^2=25-9=16 \rightarrow c=4$

الرأسان

$v_1 (h , a+k) \rightarrow v_1(2 , 5+1) \rightarrow v_1(2,6)$

$v_2 (h , -a+k) \rightarrow v_2(2 , -5+1) \rightarrow v_2(2,-4)$

البؤرتان

$F_1 (h , c+k) \rightarrow F_1(2 , 4+1) \rightarrow F_1(2,5)$

$F_2 (h , -c+k) \rightarrow F_2(2 , -4+1) \rightarrow v_2(2,-3)$

معادلة المحور الكبير $x=h=2$

معادلة المحور الصغير $y=k=1$

تمارين (2 - 3)

س1) عين كلاً من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل ممّا يأتي:

أ) $\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$ ب) $x^2+2y^2-8x+4y=0$

جـ) $9x^2+4y^2+36x-8y+4=0$

س2) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل الذي بؤرتاه $(\pm3 ، 0)$ ويمر ببؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=8\sqrt{2}\,x$

س3) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الصغير = 12 وحدة وبؤرتاه $(0 ، \pm 6)$

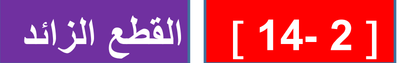
س4: جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه = 16 وحدة ويمس دليل المكافئ $y^2+36x=0$

س5) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الأصل ويمر ببؤرتي القطع المكافئ $y^2=28x$ ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 12 وحدة

س6) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الأصل وتبعد إحدى بؤرتيه عن أحد الرأسين بالعدد 2 وطول محوره الصغير يساوي 8 وحدات

س7) قطع ناقص معادلته $hx^2+ky^2=144$ ، أحد رأسيه $(6، 0)$ ويمر بالنقطة $(-3 ، 2\sqrt{3})$ جد h , k

س8) قطع ناقص مركزه في نقطة الأصل ، واختلافه المركزي $=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ومساحته $=6\pi$ وحدة مربعة جد معادلته.





الهدف من دراسة القطع الزائد

أن يكون الطالب قادراً على أن

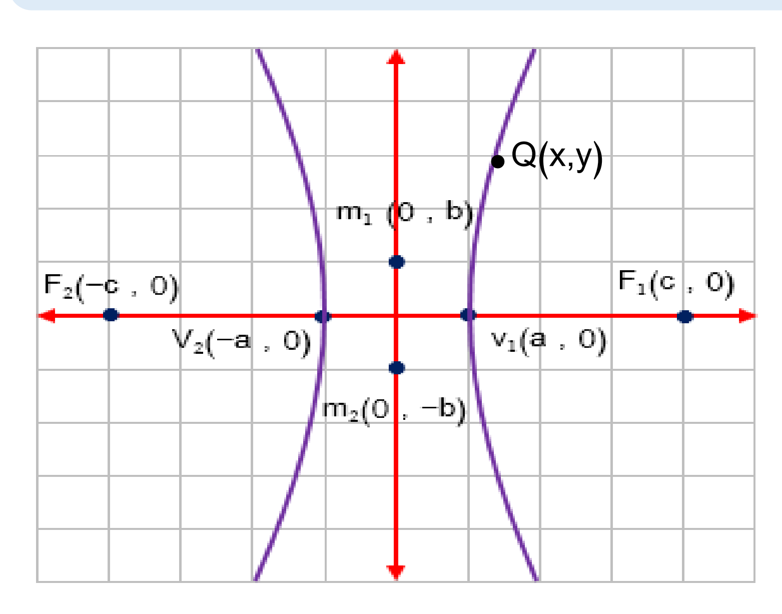
1) يعرف القطع الزائد
2) يرسم القطع الزائد
3) يجد معادلة القطع الزائد

تعريف القطع الزائد:

هو مجموعة النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي أي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي عدداً ثابتاً = 2a

$$2a = |QF_1 - QF_2|$$

اشتقاق معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل (للاطلاع فقط)



الشكل [2-42]

النقطة $Q(x,y)$ تنتمي لمنحني القطع الزائد ومن تعريف القطع الزائد:

$$|QF_1 - QF_2| = 2a$$

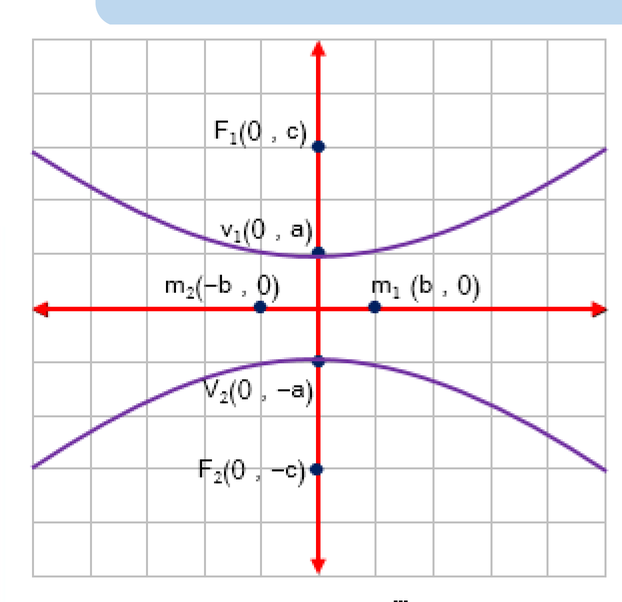
$$QF_1 - QF_2 = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + ((y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

وبعد التبسيط وبتربيع الطرفين كما في معادلة القطع الناقص سابقاً نحصل على:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل



الشكل [2-43]

بنفس الأسلوب السابق نجد أن

معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل هي:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

ملخص

قطع زائد بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل	قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
البؤرتان $F_1 (c, 0)$ $F_2 (-c, 0)$	البؤرتان $F_1 (0, c)$ $F_2 (0, -c)$
الرأسان $V_1 (a, 0)$ $V_2 (-a, 0)$	الرأسان $V_1 (0, a)$ $V_2 (0, -a)$

العلاقة بين الثوابت $c^2 = a^2 + b^2$

$c > a \quad , \quad c > b$

طول المحور الحقيقي = $2a$

طول المحور المرافق (التخيلي) = $2b$

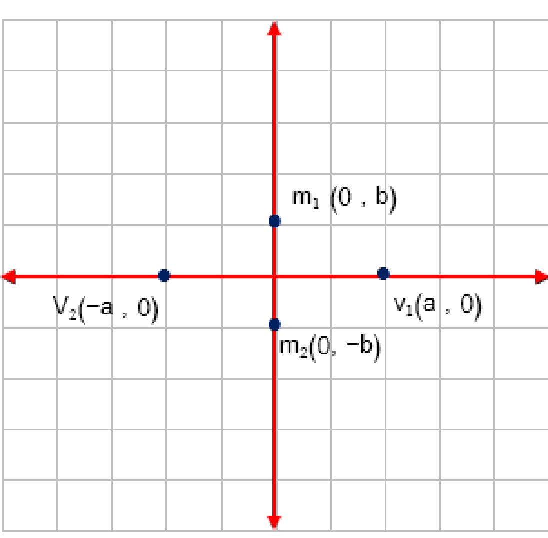
المسافة بين البؤرتين = $2c$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} > 1$

طريقة رسم القطع الزائد

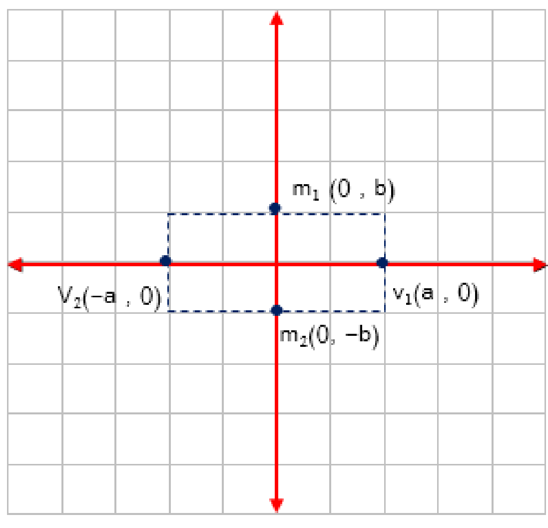
لتكن $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلة القطع الزائد المراد رسمها

❶نعين النقطتين $(a ، 0)$، $(-a ، 0)$ ونعين النقطتين $(0 ،b)$، $(0 ،-b)$



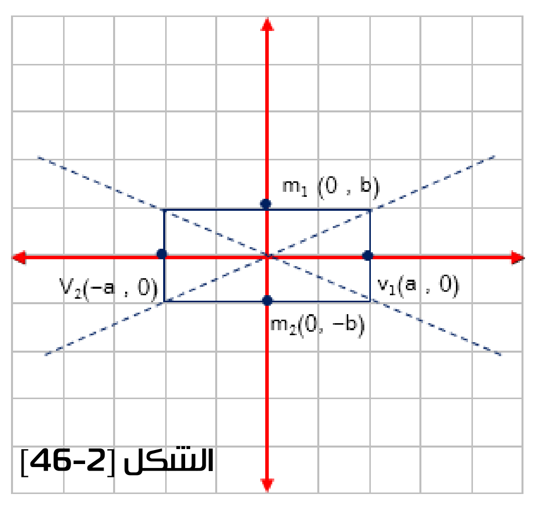
الشكل [2-44]

❷نكون مستطيلاً من هذه النقط أضلاعه توازي المحورين



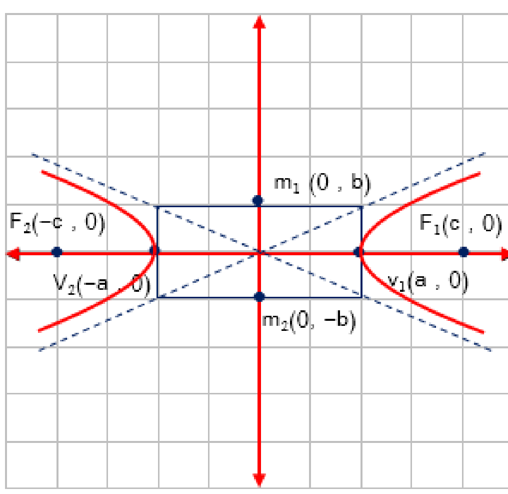
الشكل [2-45]

❸نرسم قطري المستطيل يمثلان المستقيمين المحاذيين لمنحني القطع الزائد



الشكل [46-2]

❹ ثم نرسم ذراعي القطع الزائد ونعين البؤرتين



الشكل [47-2]

مثال 40

قطع زائد معادلته هي $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

جد إحداثي الرأسين والبؤرتين وطول المحورين والمسافة بين البؤرتين والاختلاف المركزي ثم ارسمه

الحل

مقارنةً بالمعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

نحصل على:

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow V_1(4,0)\ ,\ V_2(-4,0)$

$b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow m_1(0,3)\ ,\ m_2(0,-3)$

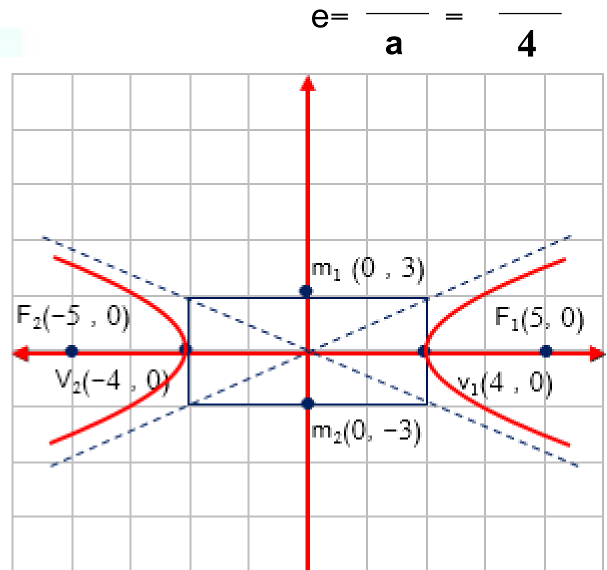
$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = 5 \rightarrow F_1(5,0), F_2(-5,0)$

طول المحور الحقيقي $2a = 8$

طول المحور المرافق $2b = 6$

المسافة بين البؤرتين $2c = 10$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$



الشكل [2-48]

مثال 41

جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي = 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي 2 والبؤرتان على محور السينات.

الحل:

$2a=6 \rightarrow a=3 \rightarrow a^2=9 \quad ....(1)$

$e=\frac{c}{a} \rightarrow 2=\frac{c}{3} \rightarrow c=6 \rightarrow c^2=36 \quad ...(2)$

$C^2=a^2+b^2 \rightarrow 36=9+b^2 \rightarrow b^2=27$

معادلة القطع الزائد

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

مثال 42

قطع زائد مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق = 6 وحدة وطول نصفي القطرين البؤريين لنقطة تنتمي إليه يساوي 13 ، 5 على الترتيب

الحل

$2b=6 \rightarrow b=3 \rightarrow b^2=9$

$|QF_1-QF_2|=2a \rightarrow 2a=|13-5|$

$\rightarrow 2a=8 \rightarrow a=4 \rightarrow a^2=16$

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

[2 – 15] انسحاب المحاور للقطع الزائد

معادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (h ،k) ومحوراه يوازيان المحورين المتعامدين.

أولا

عند انسحاب مركز القطع الزائد بمقدار (h) من الوحدات على محور السينات وبمقدار (k) من الوحدات على محور الصادات والمحور الحقيقي يوازي محور السينات تصبح المعادلة:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

إحداثي الرأسين $V(\pm a+h\ ,\ k)$

إحداثي القطبين $m(h,\ \pm b+k)$

إحداثي البؤرتين $F(\pm c+h\ ,\ k)$

ثانيا

عند انسحاب مركز القطع الزائد بمقدار (k) من الوحدات على محور الصادات وبمقدار (h) من الوحدات على محور السينات والمحور الحقيقي يوازي محور الصادات تصبح المعادلة:

$$\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$$

إحداثي الرأسين $V(h\ ,\pm a+k)$

إحداثي القطبين $m(\pm b+h,\ k)$

إحداثي البؤرتين $F(h\ ,\pm c+k)$

ملاحظة

سنقتصر في هذا البند [2 −15] على إيجاد البؤرتين والرأسين ومعادلة المحورين

مثال 43

عين كلاً من البؤرتين والرأسين ثم جد طول المحور الحقيقي والمرافق للقطع الزائد الذي معادلته

$$\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{16}=1$$

الحل)

مقارنةً بالمعادلة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$(h , k) = (1 , -2)$

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \rightarrow 2a = 6$

$b^2 = 16 \rightarrow b = 4 \rightarrow 2b = 8$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = 5 \rightarrow 2c = 10$

الرأسان

$v_1 (h , a+k) \rightarrow v_1(1 , 3+(-2)) \rightarrow v_1(1,1)$

$v_2 (h , -a+k) \rightarrow v_2(1 , -3+(-2)) \rightarrow v_2(1,-5)$

البؤرتان

$F_1(h , c+k) \rightarrow F_1(1 , 5+(-2)) \rightarrow F_1(2,3)$

$F_2 (h , -c+k) \rightarrow F_2(1 , -5+(-2)) \rightarrow v_2(1,-7)$

معادلة المحور الحقيقي $x=h=1$

معادلة المحور المرافق $y=k=-2$

تمارين (2 -4)

س1: عين كلاً من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الآتية:

أ) $4x^2-45y^2=180$

ب) $y^2-x^2=49$

جـ) $9y^2-18x-16y^2+32y=151$

د) $4y^2-4y-x^2+3x=26$

س2: قطع زائد مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق = 6 وحدة وطول نصفي القطرين البؤريين لنقطة تنتمي إليه يساوي 13 ، 5 على الترتيب

س3: جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y=2$

س4: جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ، والبعد بين بؤرتيه= 2 وحدة ويمر ببؤرتي القطع الزائد $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{24}=1$

س5: جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه على محوري الإحداثيات والذي أحد رؤوسه $(0، 3)$ وإحدى بؤرتيه $(-5، 0)$

س6) قطع زائد مركزه في نقطة الأصل معادلته $x^2-y^2=k$ وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{8}، 0)$ جد قيمة k ، واختلافه المركزي.

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

الهدف من دراسة الوحدة
ينبغي بعد دراسة الوحدة الثالثة أن يكون الطالب قادراً على أن:
1) يشتق الدوال
2) يجد المعدلات الزمنية
3) يقرب باستخدام التفاضلات
4) يرسم الدالة
5) يحل تطبيقات عملية وعسكرية على النهايات

مفردات الوحدة الثالثة

[3 – 1] مراجعة لقواعد المشتقة ثم شرح المشتقات ذات الرتب العليا

❖القاعدة الأولى

إذا كانت $y=a$ ، حيث أن a عدداً ثابتاً فإن $y'=0$

❖القاعدة الثانية

إذا كانت $y=ax$ ، حيث أن a عدداً ثابتاً فإن $y'=a$

❖القاعدة الثالثة

إذا كانت $y=x^n$ ، حيث أن n عدداً حقيقياً فإن $y'=nx^{n-1}$

❖القاعدة الرابعة

إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق

وكانت $y=g(x)+f(x)$ فإن $y'=g'(x) + f'(x)$

❖القاعدة الخامسة

إذا كانت $g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق

وكانت $y=(g(x))^n$ فإن $y'=n(g(x))^{n-1} . g'(x)$

❖القاعدة السادسة

إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق

وكانت $y=\frac{f(x)}{g(x}$ فإن $y'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

مثال1

1) $f(x)=3x^4-3x^2+3x+1$

$f'(x)=12x^3-6x+3$

2) $f(x)=(x^2-2x+3)^5$

$y'=5(x^2-2x+3)^4(2x-2)$

3) $y=(2x+3)(5x-1)$

$y'=(2x+3)(5)+(5x-1)(2)$

$y'=10x+15+10x-2=20x+13$

4) $y=\dfrac{2x+1}{3x+5}$

$$y'=\frac{(2)(3x+5)-(2x+1)(3)}{(3x+5)^2}=\frac{6x+10-6x-3}{(3x+5)^2}$$

$$=\frac{7}{(3x+5)^2}$$

مشتقة الدوال الدائرية

1) $y = \sin g(x) \rightarrow y' = \cos g(x) \cdot g'(x)$

2) $y = \cos g(x) \rightarrow y' = -\sin g(x) \cdot g'(x)$

3) $y = \tan g(x) \rightarrow y' = \sec^2 g(x) \cdot g'(x)$

4) $y = \cot g(x) \rightarrow y' = -\csc^2 g(x) \cdot g'(x)$

5) $y = \sec g(x) \rightarrow y' = \sec g(x) \tan g(x) \cdot g'(x)$

6) $y = \csc g(x) \rightarrow y' = -\csc g(x) \cot g(x) \cdot g'(x)$

مراجعة لقواعد مشتقات الدوال الأسية

$y = a^{f(x)} \rightarrow y' = (f'(x))(\ln a)(a^{f(x)})$

$y = e^{f(x)} \rightarrow y' = (f'(x))(e^{f(x)})$

مثال 2

جد المشتقة الأولى لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $y = 3^{5x+1}$ b) $y = e^{2x}$ c) $y = e^{\tan x}$

الحل

a) $y' = (5)(\ln 3)(3^{5x+1})$

b) $y' = (2)(e^{2x})$

c) $(\sec^2 x)(e^{\tan x})$

قاعدة استقاق دالة اللوغارتيم الطبيعي $y = \ln | f(x) |$

إذا كانت $y = \ln | f(x) |$

فإن $y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

مثال3

جد y' لكلٍّ ممّا يأتي :

a) $y = \ln | 3x+1 |$

b) $y = \ln | \sin x - 1 |$

c) $y = \ln | x^2+3x-1 |$

الحل

a) $y' = \frac{1}{3x+1} \cdot (3) = \frac{3}{3x+1}$

b) $y' = \frac{1}{\text{Sin}x-1} \cdot (\cos x) = \frac{\sin x}{\text{Sin}x-1}$

c) $y' = \frac{1}{x^2+3x-1} \cdot (2x+3) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1}$

[2− 3] المشتقات العليا

إذا كان لدينا $y=f(x)$ فإن

1) المشتقة الأولى يرمز لها بالرمز $y' = \dfrac{dy}{dx}$

2) المشتقة الثانية يرمز لها بالرمز $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

3) المشتقة الثالثة يرمز لها بالرمز $y^{(3)} = \dfrac{d^3y}{dx^3}$

4) المشتقة النونية يرمز لها بالرمز $y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$

مثال4

جد $y^{(4)}$ للدالة $y= \cos 2x + \cos\pi$ عند $x=\dfrac{\pi}{6}$

الحل

$y'= -2\sin 2x + 0$

$y'' =-4\cos 2x$

$y^{(3)} = 8\sin 2x$

$y^{(4)} =16\cos 2x \rightarrow y^{(4)} = 16\cos 2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\rightarrow y^{(4)}=16\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =16 \times \frac{1}{2} =8$$

مثال5

إذا علمت أن $y = 2 \ \ln \sqrt{\sin x}$ فبرهن أن $y^{(2)} = -\csc^2 x$

الحل

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \cot x \quad \rightarrow \quad y'' = -\csc^2 x$$

مثال6

إذا علمت أن $y = e^{2x} + e^{5x} - 1$ جد $y^{(3)}$

الحل

$$y' = 2e^{2x} + 5e^{5x}$$

$$y'' = 4e^{2x} + 25e^{5x}$$

$$y^{(3)} = 8e^{2x} + 125e^{5x}$$

مثال7

إذا علمت أن $y = x \ln |x|$ جد $y^{(2)}$

الحل

$$y' = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + \ln|x|$$

$$y' = 1 + \ln|x| \quad \rightarrow \quad y'' = \frac{1}{x}$$

ملاحظات

1) $\ln 1 = 0$
2) $\ln e = 1$
3) $\ln e^x = x$
4) $e^{\ln x} = x$

مثال8

إذا كانت $y = e^{\ln|x|}$ ، فجد $y^{(4)}$

الحل

$$y = \ln|x|$$

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y'' = -x^{-2} \rightarrow y^{(3)} = 2x^{-3} \rightarrow y^{(4)} = -6x^{-4}$$

تمارين [1 – 3]

س1) إذا كانت $y=\cos^4 x - \sin^4 x$ برهن أن $\frac{d^4 y}{dx^4} = 16\cos 2x$

س2) إذا علمت أن $y = \ln e^{2\sin x}$ فأثبت أن $y^{(6)} + y = 0$

س3) إذا علمت أن $y = x\sin x$ جد $y^{(4)}$

س4) إذا علمت أن $y = \ln\sqrt{x}$ جد $\frac{d^3 y}{dx^3}$

س5) إذا كانت $y = \ln x^x$ فجد قيمة x التي تجعل $y^{(3)} = -4$

[3 – 3] المعدلات المرتبطة (المعدلات الزمنية)



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

1) يُعرف مفهوم المعادلة الزمنية

2) يجد حل مسألة ضمن مفهوم المعادلة الزمنية

من التطبيقات العملية للتفاضل (تطبيقات المعدلات الزمنية) فالكثير من الكميات في حياتنا اليومية تتغير مع الزمن ، فمثال على ذلك سرعة انحلال مادة في الماء ، وسرعة تغير التيار في جزء ما من الدورة الكهربائية ، وسرعة إنتاج بضاعة ما ، سرعة نمو النبات في بيئة مناسبة ، سرعة قذيفة باتجاه العدو ، سرعة حركة السيارات ، إلى غير ذلك من التطبيقات العملية .

فإذا فرضنا أن x هو بعد جسم (بوحدة المتر) ناتج من حركة جسم فإن معدله الزمني هو $\frac{dx}{dt}$ وحدته m|s

وإذا كان المعدل الزمني للمتغير x في حالة تزايد يكون $\frac{dx}{dt}$ موجباً ويسمى معدل ازدياد x بالنسبة للزمن

وإذا كان المعدل الزمني للمتغير x في حالة تناقص يكون $\frac{dx}{dt}$ سالباً ويسمى معدل تناقص x بالنسبة للزمن

لحل مسألة تتعلق بالمعدلات الزمنية ننصح بما يلي :

❶ قد نحتاج رسم توضيحي للمسألة

❷ نحتاج قانون خاص بالمسألة

❸ نحدد الثوابت من المتغيرات

❹ نشتق المعادلة ونعوض المتغيرات.

مثال9

خزان اسطواني قائم نصف قطر قاعدته 2m ،يصب فيه ماء بمعدل 0.1 $m^3|s$ جد معدل ارتفاع الماء في الخزان.

الحل

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi(2)^2 h \rightarrow V = 4\pi h$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow 0.1 = 4\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{40\pi} \text{ m|s}$$



الشكل [3-1]

مثال10

إذا كانت y=ln|x| وكان معدل الإحداثي الصادي = 0.2 unit|s جد معدل الإحداثي السيني عند x=2

الحل

$$y = \ln|x| \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow 0.2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = 0.4 \text{ unit|s}$$

مثال 11

يتزايد نصف قطر كرة بمعدل 2 cm|s . فعندما يكون نصف قطر الكرة 15cm جد

1) معدل ازدياد حجم الكرة

2) معدل ازدياد المساحة السطحية للكرة

الحل

1) حجم الكرة

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{3} . 3r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{3} . 3(15)^2 (2) = 1800\pi \ cm^3|s$$

2) مساحة سطح الكرة

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r . \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi (15)(2) = 240\pi \ cm^2|s$$

مثال12

نقطة تتحرك على منحنى الدالة $y=2x^3-3x+1$ وكان معدل تزايد y يساوي (0.6 unit|s) جد معدل تغير x عندما يكون $x=1$

الحل

$$y=2x^3-3x+1$$

$$\frac{dy}{dt}=6x^2\frac{dx}{dt}-3\frac{dx}{dt}$$

$$0.6=6(1)^2\frac{dx}{dt}-3\frac{dx}{dt} \rightarrow 0.6=3\frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt}=0.2 \text{ unit|s}$$

مثال13

قطعة معدنية على شكل مثلث متساوي الأضلاع يتناقص طول ضلعها بمعدل 1cm|s فعندما يكون طول ضلعه 8cmجد معدل نقصان مساحته.

الحل

مساحة مثلث متساوي الأضلاع

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$$

L L L

الشكل[3- 2]

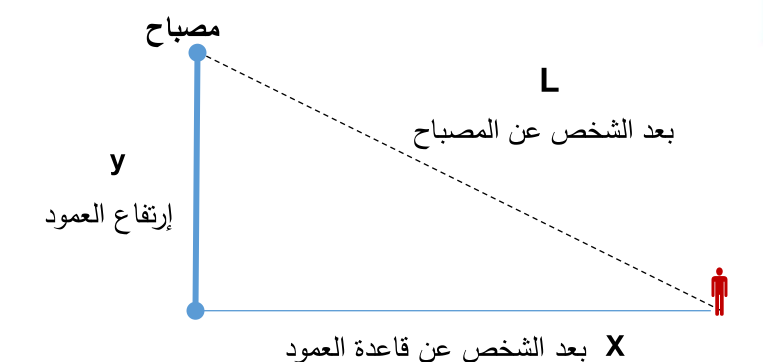
$$\frac{dA}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2L\cdot\frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2(8)(-1)=-4\sqrt{3} \text{ cm|s}$$

مثال14

عمود كهرباء ارتفاعه 8m يعلوه مصباح، اقترب منه شخص بمعدل 0.5m|s وعندما يصبح الشخص على بعد 6m من قاعدة العمود جد معدل البعد بين الشخص والمصباح.

الحل



الشكل [3-3]

$$X^2 + y^2 = L^2$$

$$x^2 + (8)^2 = L^2$$

$$x^2 + 64 = L^2 \rightarrow (6)^2 + 64 = L^2 \rightarrow L^2 = 100 \rightarrow L = 10 \text{ m}$$

نشتق العلاقة $x^2 + 64 = L^2$

$$2x.\frac{dx}{dt} + 0 = 2L.\frac{dL}{dt}$$

$$2(6)(0.5) = 2(10)\frac{dL}{dt} \rightarrow \frac{dL}{dt} = 0.3 \text{ m|s}$$

مثال15

يتحرك جسم وفق العلاقة $S(n)=\sqrt{n^2-6n+12}$

جد 1) السرعة عندما $n=4\ s$

2) أين ومتى يتوقف الجسم

الحل

$$1)\ \frac{dS}{dt}=\frac{2n-6}{2\sqrt{n^2-6n+12}}$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{2(4)-6}{2\sqrt{(4)^2-6(4)+12}}$$

$$=\frac{1}{2}\quad m|s$$

2) يتوقف الجسم عن الحركة عندما السرعة $\frac{dS}{dt}=0$

$$\frac{2n-6}{2\sqrt{n^2-6n+12}}=0\rightarrow 2n-6=0\rightarrow n=3\ s$$

البعد بعد 3 ثانية: 2)

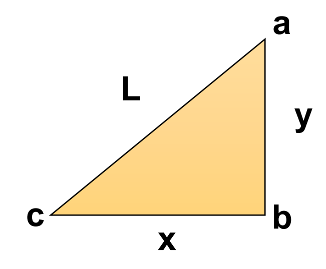
$$S(n)=\sqrt{n^2-6n+12}=\sqrt{(3)^2-6(3)+12}=\sqrt{3}\quad m$$

مثال16

مثلـث abc قـائم الزاوية فـي b ، يـزداد طـول الضـلع ab بمعـدل 2cm|s بينما يتناقص طـول الضـلع bc بمعـدل 3cm|s فعنـدما يكـون طول الضلع ab = 6cm ، وطول الضلع bc=8cm فجد:

1) معدل التغير في مساحة المثلث

2) معدل تغير طول الضلع ac



الحل

الشكل [3-4]

$$1)\quad A = \frac{1}{2} xy$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt} \right]$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}[(8)(2)+(6)(-3)] = -1 cm|s$$

$$2)\quad L^2 = x^2 + y^2 \rightarrow L^2 = (8)^2 + (6)^2 = 100 \rightarrow L = 10$$

$$L^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 2L.\frac{dL}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow 2(10)\frac{dL}{dt} = 2(8)(-3) + 2(6)(2)$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} = -1.2 cm|s$$

مثال17

إسطوانة دائرية قائمة صلدة مصنوعة من الشمع(ارتفاعها يساوي ضعف نصف قطرها دائما) تذوب بمعدل $48\pi cm^3|s$ فعندما يكون نصف قطرها 2cm جد:

1) معدل تغير نصف قطرها ومعدل ارتفاعها.

2) معدل تغير مساحتها السطحية.

الحل

1) $h=2r \quad ....(1)$

$V = \pi r^2 h \quad ....(2)$

نعوض معادلة(1) في معادلة(2):

$$V = \pi r^2 (2r)$$

$$V=2\pi r^3 \rightarrow \frac{dv}{dt} = 6\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\rightarrow 48\pi=6\pi(2)^2 \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dr}{dt}=2cm|s$$

لإيجاد معدل الارتفاع نشتق العلاقة $h=2r$

$$\frac{dh}{dt}=2\frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt}=2(2)=4cm|s$$

2) $A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \rightarrow A=2\pi r(2r)+2\pi r^2$

$$\rightarrow A=6\pi r^2$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt}=12\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}=12\pi(2)(2)=48\pi \ cm^2|\ s$$

مثال18

نقطة مادية تتحرك على منحنى الدالة $y=\sin\theta$ ، فإذا كان معدل تغير الزاوية $0.5\ R|s$ فجد معدل الاحداثي الصادي عندما $\theta=\frac{\pi}{3}$

الحل

$$\frac{dy}{dt} = \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)(0.5) = 0.25\ \text{unit}|s$$

نشاط

مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل، ارتفاعه يساوي $120cm$ وطول قطر قاعدته $40cm$ يتسرب منه السائل بمعدل $2\pi\ cm^3|s$ جد معدل انخفاض الماء في الخروط عندما يكون عمق الماء $3cm$

تمارين (3-2)

س1) مكعب ثلج يذوب بمعدل $0.1cm^3|s$ بحيث يبقى محافظاً على شكله جد معدل تغير مساحته السطحية عندما يكون طول حرفه 10 cm

س2) طائرة مسيرة تابعة لدولة الخلافة الإسلامية تطير على ارتفاع 6Km عن الأرض تسير أفقياً وبسرعة 20Km|s ما هو معدل تغير البعد بين الطائرة وهدف على الأرض عندما تكون الطائرة على بعد 10 Km من الهدف.

س3) يتساقط رمل على الأرض بمعدل $5m^3|s$ فيتكون مخروط رملي ارتفاعه ضعف نصف قطره جد معدل ارتفاع الرمل وذلك عندما يكون نصف قطر قاعدته 7.5m

س4) إسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل 1cm|s بحيث تبقى مساحتها الجانبية $24\pi\ cm^2$ جد معدل تغير نصف قطر القاعدة عندما يكون الارتفاع

.2cm

س5) قطعة حديد صلدة مكعبة الشكل طول ضلعها 10cm مغلفة بمادة الشمع بحيث يبقى شكله مكعبا ، فإذا كان معدل ذوبان سمك الشمع 0.2 cm|s ففي اللحظة التي يكون فيها سمك الشمع 1cm جد معدل النقصان في حجم الشمع ومعدل النقصان في مساحته السطحية

س6) عمود كهرباء ارتفاعه 6.4 m يعلوه مصباح كهربائي ، اقترب منه شخص طوله 1.6 m بمعدل 20 m|min جد معدل ظل الشخص.

[3 – 4] استخدام التفاضل في حساب القيم التقريبية



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

يقرب باستخدام التفاضلات

لحل مسائل التقريب نتبع الخطوات

❶ نحتاج X_1 وهي قيمة تقريبية نستطيع إيجاد ناتج تعويضها المباشر

نحتاج X_2 وهي القيمة المعطاة في السؤال

نجد $\Delta X = X_2 - X_1$

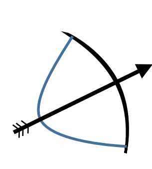
❷ نجد قيمة الدالة y بتعويض قيمة X_1 في الدالة

❸ نجد المشتقة الأولى y' ونعوض قيمة X_1

❹ نجد التغير في القيمة التقريبية $dy = y' \, \Delta X$

❺ نجد القيمة التقريبية $\cong y + dy$









مثال19

باستخدام معلومات التفاضل جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt{26}$

الحل:

$X_2 = 26 \quad , \quad X_1 = 25 \quad , \quad \Delta X = 26 - 25 = 1$

$y = \sqrt{X} = \sqrt{25} = 5$

$y = X^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2} X^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{X}} = \frac{1}{2\sqrt{25}}$

$= 0.1$

$dy = y' \cdot \Delta X = (0.1)(1) = 0.1$

القيمة التقريبية $y + dy \cong 5 + 0.1 \cong 5.1$

مثال20

جد وبصورة تقريبية وباستخدام التفاضلات ناتج المقدار $\frac{1}{\sqrt[4]{15}}$

الحل:

$X_2 = 15 \quad , \quad X_1 = 16 \quad , \quad \Delta X = 15 - 16 = -1$

$y = \frac{1}{\sqrt[4]{X}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = 0.5$

$y = X^{\frac{-1}{4}} \rightarrow y' = \frac{-1}{4} X^{\frac{-5}{4}} = \frac{1}{4 \sqrt[4]{X^5}} =$

$= \frac{-1}{4 \left[\sqrt[4]{16}\right]^5} = \frac{-1}{128} = -0.0078$

$dy = y' \cdot \Delta X = (-0.0078)(-1) = 0.0078$

$y + dy \cong 0.5 + (0.0078) \cong 0.5078$ القيمة التقريبية

مثال21

إسطوانة دائرية قائمة (ارتفاعها) = نصف قطر قاعدتها فإذا كان حجمها = $28\pi CM^3$ فكم يكون نصف قطر قاعدتها بصورة تقريبية وباستخدام التفاضلات .

الحل

$h=r$

$V = \pi r^2 h$ حجم الإسطوانة

$$28\pi = \pi r^2 r \rightarrow r^3 = 28 \rightarrow r = \sqrt[3]{28}$$

نجري خطوات التقريب على المقدار $\sqrt[3]{28}$

$X_2 = 28 \quad , \quad X_1 = 27 \quad , \quad \Delta X = 28 - 27 = 1$

$y = \sqrt[3]{X} = 27 = 3$

$$y = X^{\frac{1}{3}} \rightarrow y' = \frac{1}{3} X^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{X^2}} =$$

$$= \frac{1}{27} = 0.037$$

$dy = y' \cdot \Delta X = (0.037)(1) = 0.037$



$y + dy \cong 3 + 0.037 \cong 3.037\ CM$ القيمة التقريبية لنصف قطر الإسطوانة

مثال22

خزان بشكل متوازي السطوح المستطيلة قاعدته مربعة الشكل ، وارتفاعه ضعف طول قاعدته ، فإذا كان طول القاعدة 4.98 CM جد حجم الخزان بصورة تقريبية وباستخدام التفاضلات.

الحل

ح = الطول × العرض × الارتفاع

2X

X

X

الشكل [3-5]

$$V = (X)(X)(2X) \rightarrow V = 2X^3$$

$$X_2 = 4.98 \quad , X_1 = 5 \quad , \quad \Delta X = 4.98 - 5 = -0.02$$

$$V = 2(5)^3 = 250$$

$$V' = 6X^2 \rightarrow V' = 6(5)^2 = 150$$

$$\mathbf{dV = V' \cdot \Delta X = (150)(-0.02) = -3}$$

القيمة التقريبية $\mathbf{V + dV} \cong 250 + (-3) \cong 247 \quad CM^3$

نشاط

باستخدام معلومات التفاضل جد القيمة التقريبية لكلٍّ ممّا يلي:

أ) $\sqrt[3]{26.98}$

ب) $\dfrac{1}{2.2}$ ج) $\sqrt[5]{0.99}$

مثال23

مخـروط دائـري قـائم ارتفاعـه يسـاوي نصـف قطـره فـإذا كـان ارتفاعـه 30.03 CM ، احسب القيمة التقريبية لتغير لحجم المخروط

الحل

$h=r$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \rightarrow V = \frac{\pi}{3} (h)^2 h \rightarrow V = \frac{\pi}{3} h^3$$

$h = 30 \quad , \quad \Delta h = 0.03$

$$V = \frac{\pi}{3} (30)^3 = 9000\pi \ CM^3$$

$$V' = \frac{\pi}{3} .3h^2 \rightarrow V' = \pi(30)^2 = 900\pi$$

$$\mathbf{dV = V' . \Delta X = (900\pi)(0.03) = 27\pi}$$

وتمثل القيمة التقريبية لتغير حجم القذيفة

نشاط

1) جد ناتج المقدار $loq(9.99)^3$ بصورة تقريبية وباستخدام التفاضل

2) جد ناتج المقدار $2^{4.99}$ بصورة تقريبية وباستخدام التفاصل

علماً أن $ln2 = 0.3010$

تمارين (3- 3)

س1: جد وبصورة تقريبية وباستخدام التفاضلات ناتج كلاً ممّا يأتي:

أ) $\sqrt{0.83}$ ب) $6 + (2.98)^3$

جـ) $\frac{1}{\sqrt[5]{34}}$ د) $\sqrt{0.2}$

هـ) $\frac{2}{9.9} + (9.9)^3$ و) $\sqrt[3]{0.06}$

س2) إذا علمت أن $f(X)=\sqrt{2X+5}$ جد وصورة تقريبية وباستخدام التفاضلات قيمة $f(1.99)$

س3) إذا علمت أن $f(X)=\sqrt[4]{4X+3}$ جد وبصورة تقريبية وباستخدام التفاضلات قيمة $f(20)$

س4: مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته تساوي ثلاثة أمثال ارتفاعه فإذا كان حجمه يساوي $21\pi\ cm^3$ فجد نصف قطر قاعدته بصورة تقريبية

س5: مربع مساحته $0.5\ cm^2$ جد بصورة تقريبية طول ضلعه باستخدام التفاضلات .

س6) خزان مكعب الشكل طول ضلعه (3m) لتخزين المياه يراد تغليفه بمادة عازلة سمكها (0.1m) جد حجم الغلاف بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

[3 – 5] اختبار التزايد والتناقص للدالة باستخدام المشتقة الأولى

الهدف من الدرس



أن يكون الطالب قادراً على أن:
يجد مناطق التزايد و التناقص للدالة من خلال المشتقة الأولى

لتكن د مستمرة في الفترة المغلقة $[a , b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a , b) فإذا كانت:

1) $f'(x) > 0$
$\forall x \in (a , b) \to f$ تكون الدالة متزايدة

2) $f'(x) < 0$
$\forall x \in (a , b) \to f$ تكون الدالة متناقصة

مثال 24

لتكن $y=x^2$ جد مناطق التزايد والتناقص

الحل

$$y' = 2x = 0 \to x=0$$

نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى

$$x = 1 \to y'=2(1)=2$$

تكون الدالة متزايدة

$$x = -1 \to y'=2(-1)=-2$$

تكون الدالة متناقصة

إشارة 'y   – – –   0   + + +

مناطق التزايد $= \{x : x > 0\}$

مناطق التناقص $= \{x : x < 0\}$

مثال 25

جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $y=x^3 -9x^2 +24x$

الحل:

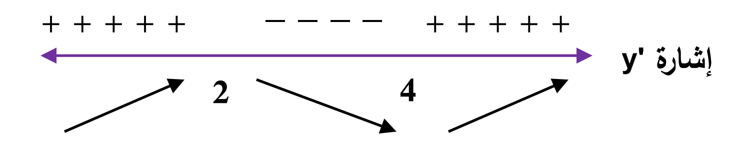
$y'= 3x^2-18x +24=0$

نقسم على 3

$X^2 -6x + 8 =0 \rightarrow (x-4)(x-2)=0$

$\rightarrow x=4 \quad or \quad x=2$

نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى بالتعويض بقيم مجاورة للعددين $X=4$, $x=2$



مناطق التزايد = $\{x:x >4\}$, $\{ x: x<2 \}$

مناطق التناقص = $(2 ، 4)$

نشاط

جد مناطق التزايد والتناقص (إن وجدت) لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $y=x^3 -3x^2 + 2$

b) $y=(1-x)^5$

[3 – 6] النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية



الهدف من الدرس

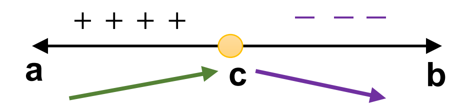
أن يكون الطالب قادراً على أن:

يجد النهاية العظمى أو الصغرى أو كلاهما لدالة ما

لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a ,b]$ وقابلة للاشتقاق عند $x=c$ التي تنتمي إلى الفترة المفتوحة (a ,b) فإذا كانت :

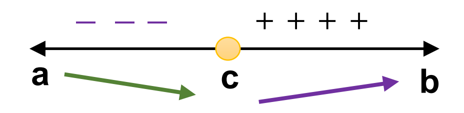
$$1)\ \forall x \in (c , b) \rightarrow f'(x) < 0$$
$$\forall x \in (a , c) \rightarrow f'(x) > 0$$
$$f'(c) = 0$$

فإن $f(c)$ نهاية عظمى محلية



$$2)\ \forall x \in (c , b) \rightarrow f'(x) > 0$$
$$\forall x \in (a , c) \rightarrow f'(x) < 0$$
$$f'(c) = 0$$

فإن $f(c)$ نهاية صغرى محلية



خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى المحلية ومناطق التزايد والتناقص

❶ نجد $f'(x)$

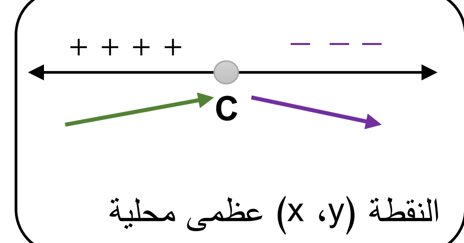
❷ نجعل $f'(x)=0$ ونجد قيم x

❸ لمعرفة نوع النهاية

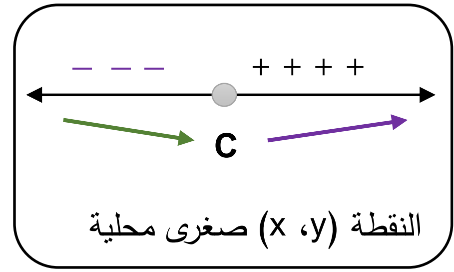
نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى بالتعويض بقيم مجاورة لقيم x

إذا كانت $f'(x) > 0$ تكون المناطق مناطق تزايد

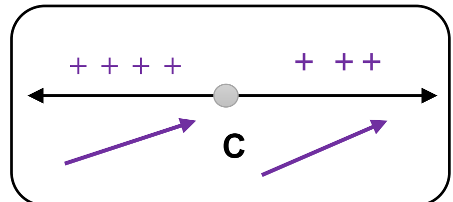
إذا كانت $f'(x) < 0$ تكون المناطق مناطق تناقص

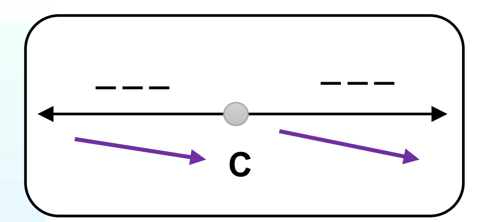


النقطة (x ،y) عظمى محلية



النقطة (x ،y) صغرى محلية





الدالة لا تملك نهاية عظمى ولا نهاية صغرى

مثال 26

جد النهايات العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) ومناطق التزايد والتناقص للدالة $y=x^2 -4x +3$

الحل:

$y' = 2x-4=0 \rightarrow x=2 \rightarrow y=(2)^2 -4(2)+3=-1$

مناطق التزايد= $\{ x : x > 2 \}$

مناطق التناقص= $\{x : x < 2 \}$

– – –   + + + +

2

فنحصل على النقطة (−1 ، 2) نهاية صغرى محلية

مثال 27

جد النهايات العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) ومناطق التزايد والتناقص للدالة $y=x^3 -9x^2 +24x$

الحل:

$y'=3x^2-18x+24=0$ نقسم على 3

$X^2 -6x + 8 =0 \rightarrow (x-4)(x-2)=0$

$X=4 \rightarrow y =(4)^3 -9(4)^2 +24(4)=16 \rightarrow (4 , 16)$

$X=2 \rightarrow y =(2)^3 -9(2)^2 +24(2)=20 \rightarrow (2 , 20)$

+ + + + +   – – – –   + + + + +

2   4

مناطق التزايد= $\{x: x > 4 \}$, $\{ x:x < 2 \}$

مناطق التناقص= $(2 , 4)$

فنحصل على النقطة (16، 4) نهاية صغرى محلية

ونحصل على النقطة (20، 2) نهاية عظمى محلية

[3 – 7] نقط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

1) يجد نقاط الانقلاب للدالة

2) يجد مناطق التقعر والتحدب للدالة من خلال إيجاد المشتقة الثانية

خطوات إيجاد نقط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب

❶ نجد $f''(x)$

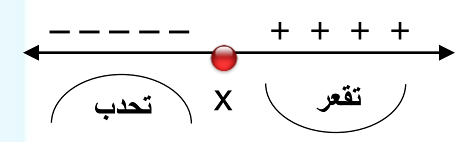
❷ نجعل $f''(x)=0$ ونجد قيم x

❸ نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الثانية بالتعويض بقيم مجاورة لقيم x

إذا كانت $f''(x) > 0$ تكون المناطق مناطق تقعر

إذا كانت $f''(x) < 0$ تكون المناطق مناطق تحدب

لاحظ الشكل:



مثال28

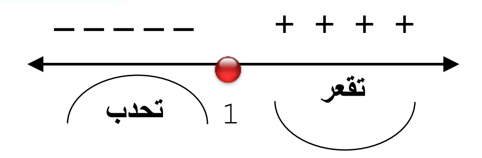
جد مناطق التحدب والتقعر ونقط الانقلاب إن وجدت للدالة

$$y=x^3-3x^2-9x$$

الحل)

$$y'=3x^2-6x-9$$

$$y''=6x-6=0 \rightarrow x=1 \rightarrow y=(1)^3-3(1)^2-9(1)=-11$$



مناطق التقعر = $\{x : x > 1\}$

مناطق التحدب= $\{x : x < 1\}$

فنحصل على النقطة (1 ،−11) نقطة انقلاب

مثال 29

جد مناطق التحدب والتقعر ونقط الانقلاب (إن وجدت) للدالة:

$$y=x^2-4x+2$$

الحل:

$$y'=2x-4 \quad \rightarrow y''=2 \neq 0$$

الدالة لا تملك نقطة انقلاب والدالة مقعرة

[3 – 8] استخدام المشتقة الثانية لمعرفة نوع النهاية

الهدف من الدرس



أن يكون الطالب قادراً على أن:

يبين نوع النهاية باستخدام المشتقة الثانية

- **نجعل $y'=0$ ثم نجد قيم x**
- **ثم نجد المشتقة الثانية للدالة**
- **نعوض قيم x في المشقة الثانية**

فإذا كانت $y''=+$ تكون الدالة مقعرة والنهاية صغرى محلية

وإذا كانت $y''=-$ تكون الدالة محدبة و النهاية عظمى محلية

وإذا كانت $y''=0$ الطريقة فاشلة ونعود إلى طريقة خط الأعداد

مثال 30

باستخدام المشتقة الثانية إن أمكن، جد النهايات المحلية للدالة

$$y=6x-3x^2-1$$

الحل:

$y'=6-6x=0 \rightarrow x=1 \rightarrow y=6(1)-3(1)^2-1=2$

$y''=-6$

الدالة محدبة ونوع النهاية صغرى محلية

$$\overset{-\ -\ -\ -\ -}{\searrow}\ \ 1\ \ \overset{+\ +\ +}{\nearrow}$$

مناطق التزايد = $\{x : x>1\}$

مناطق التناقص= $\{x : x<1\}$

النهاية صغرى محلية وهي (1 , 2)

مثال 31

المنحني $y=ax^2+bx+4$ يمس المستقيم $y=2x-5$

عند $x=2$ وكان للمنحني نهاية محلية عند $x=1$

جد قيم $a , b \in R$ ثم بين نوع النهاية؟

الحل

المنحني يمس المستقيم عند $x=2$ ← ميل المنحني = ميل المستقيم

مشتقة المنحني ← $y'=2ax+b$

مشتقة المستقيم ← $y'=2$

مشتقة المنحني = مشتقة المستقيم

$$2ax+b=2 \rightarrow 2a(2)+b=2 \rightarrow 4a+b=2 \rightarrow b=2-4a \;...(1)$$

المنحني يملك نهاية عند $x=1$

$$y'=2ax+b=0 \rightarrow 2a(1)+b=0 \rightarrow 2a+b=0 \;.....(2)$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$2a+(2-4a)=0 \rightarrow -2a=-2 \rightarrow a=1$$

عوض في معادلة (1)

$$b=2-4(1)=-2$$

لبيان نوع النهاية (عظمى أم صغرى)

نجد المشتقة الثانية للمنحني

$$y''=2a \rightarrow y''=2(1)=2$$

الدالة مقعرة ونوع النهاية صغرى محلية لان $y''=+$

مثال 32

إذا كانت $y=x^2-ax+b$

دالة لها نقطة حرجة هي $(-4 \text{ ، } 4)$ جد قيمة $a,b \in R$

ثم بين نوع النقطة الحرجة، وهل تملك الدالة نقطة انقلاب بين ذلك؟

❖ النقطة $(4 \text{ ،} -4)$ تحقق المعادلة $y=x^2-ax+b$

$$-4 = (4)^2 - a(4)+b \rightarrow -4 -16 = -4a + b$$

$$-20 = -4a + b \quad ....(1)$$

❖ الدالة لها نقطة حرجة

$$y' = 2x - a = 0 \rightarrow 2(4) - a = 0 \rightarrow a=8$$

❖ عوض في معادلة 1) لإيجاد قيمة b

$$-20 = -4(8) + b \rightarrow b=12$$

∴ قيمة $a=8 \quad , \quad b=12$

❖ لبيان نوع النقطة الحرجة:

نجد $y''=2$

∴ النقطة نهاية صغرى محلية

الدالة لا تملك نقطة انقلاب والدالة مقعرة

مثال 33

لتكن $f(x)= x^3 -3x^2 +c$

تملك نقطة انقلاب تنتمي لمحور السينات ، جد قيمة $c \in R$

الدالة تملك نقطة انقلاب :

$$y'=3x^2-6x \rightarrow y''=6x-6=0 \rightarrow x=1$$

وبما أن النقطة تنتمي لمحور السينات $\leftarrow$ $y=0$

أصبح لدينا النقطة (1 ، 0) نعوضها في الدالة الأصلية لإيجاد قيمة c

$$0 =(1)^3-3(1)^2 + c \rightarrow c=2$$

نشاط

1) المنحني $y =ax^2 +4x+b$

يمر بالنقطة (8 ، 1) وكان المنحني متزايد لكل $x>-2$ ومتناقص لكل $x<-2$ جد قيمة $a,b \in R$

2) هل تمتلك الدالة $f(x)=x^3+3x+1$ نقط حرجة بين ذلك؟

وهل تملك الدالة نقطة انقلاب أيد قولك؟

تمارين (3-4)

س1) جد النهايات العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) ومناطق التزايد
والتناقص للدوال الآتية:

a) $f(x)=3x^2-x^3+1$ b) $f(x)=(3-x)^3+1$

س2) جد مناطق التحدب والتقعر ونقط الانقلاب (إن وجدت) للدالة:

a) $f(x)=x^4-1$ b) $f(x)=x^3-3x^2$

س3) باستخدام المشتقة الثانية إن أمكن، جد النهايات المحلية للدوال الآتية:

a) $f(x)=x^3-3x^2-9x$ b) $y=4-(x+1)^4$

س4) إذا كانت 2 تمثل نهاية صغرى محلية للمنحني

$f(x)=x^3-3x^2+c$

1) جد قيمة $c\in R$

2) جد نقطة الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب.

س5) عين قيم الثوابت $a,b,c\in R$ بحيث يكون للمنحني

$y=ax^3+bx^2+cx$

نقطة حرجة (-5 ،1) ، ونقطة انقلاب عند $x=-1$

ثم بين نوع النقط الحرجة .

س6) إذا كانت $y=ax^3+bx^2$ ، جد قيمة $a,b\in R$

إذا علمت أن لمنحني الدالة نقطة انقلاب (2، 1)

[3 – 9] نوع الدالة (الدالة الزوجية و الدالة الفردية)



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:

يبين نوع الدالة (زوجية أم فردية)

1) تسمى الدالة $y=f(x)$ دالة زوجية إذا كانت تحقق

$f(-x)=f(x)$

ويكون منحني الدالة الزوجية متناظراً حول محور الصادات

2) تسمى الدالة $y=f(x)$ دالة فردية إذا كانت تحقق

$f(-x)=-f(x)$

ويكون منحني الدالة الفردية متناظر حول نقطة الأصل

3) تسمى الدالة $y=f(x)$ دالة لا زوجية ولا فردية

إذا كانت لا تحقق شرط الدالة الزوجية ولا شرط الدالة الفردية

ويكون منحني الدالة غير متناظر حول محور الصادات ولا حول نقطة الأصل

مثال 34

حدد نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو لا زوجية ولا فردية

a) $f(x)=x^3-4x$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

c) $f(x)=x^2-2x+3$

d) $f(x)=\sin x$

e) $f(x)=\cos x$, f) $f(x)=\frac{1}{X^2+1}$ g) $f(x)=\frac{5}{x}$

الحل)

a) $f(x)=x^3-4x$

$f(-x)=(-x)^3-4(-x)=-x^3+4x=-(x^3-4x)$

بما أن $f(-x)=-f(x)$

الدالة فردية ويكون منحنى الدالة الفردية متناظراً حول نقطة الأصل

b) $f(x)=x^4-2x^2$

$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2 = x^4 -2x^2$

بما أن $f(-x)= f(x)$

الدالة زوجية ويكون منحنى الدالة الزوجية متناظراً حول محور الصادات

c) $f(x)=x^2-2x+3$

$f(-x)=(-x)^2-2(-x) +3 = x^2+2x+3$

بما أن $f(-x) \neq f(x) \quad , \quad f(-x)\neq -f(x)$

الدالة لا زوجية ولا فردية

ويكون منحنى الدالة غير متناظر

d) $f(x)=\sin x$

$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x$

بما أن $f(-x)=-f(x)$

الدالة فردية ويكون منحنى الدالة الفردية متناظراً حول نقطة الأصل

ملاحظة

1) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

2) $\cos(-\theta)=\cos\theta$

3) $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

e) $f(-x)=\cos(-x) = \cos x$

بما أن $f(-x)= f(x)$

الدالة زوجية ويكون منحنى الدالة الزوجية متناظراً حول محور الصادات

f) $f(x)=\dfrac{1}{X^2+1}$

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{X^2+1}$$

بما أن $f(-x)= f(x)$

الدالة زوجية ويكون منحنى الدالة الزوجية متناظراً حول محور الصادات

f) $f(x)=\dfrac{5}{x}$

$$f(-x)=\frac{5}{-x} =-\frac{5}{x}$$

بما أن $f(-x)= -f(x)$

الدالة فردية ويكون منحنى الدالة الفردية متناظراً حول نقطة الأصل

[3 – 10] خطوط التقارب العمودية والأفقية

خطوط التقارب العمودية وخطوط التقارب الأفقية للدالة الكسرية

إيجاد خطوط التقارب العمودية

أن تكون الدالة بالشكل $y=f(x)$

نجعل المقام =0 ونجد قيم x وتمثل خطوط التقارب العمودية

إيجاد خطوط التقارب الأفقية

أن تكون الدالة بالشكل $x=f(y)$

نجعل المقام =0 ونجد قيم y وتمثل خطوط التقارب الأفقية

مثال 35

جد خطوط التقارب العمودية وخطوط التقارب الافقية مع رسمها لكل من الدوال الآتية:

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{4}{X^2+1}$

الحل

$$a)\ y = \frac{2x+1}{x-3}$$

خط التقارب العمودي

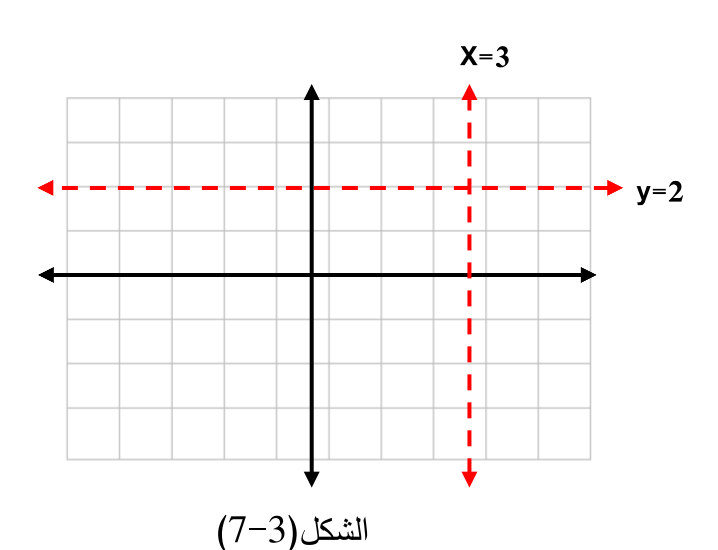
$x-3=0 \quad \rightarrow x=3$

خط التقارب الافقي نكتب الدالة بالشكل $x=f(y)$

$yx-3y=2x+1 \quad \rightarrow yx-2x=3y+1 \rightarrow \quad x(y-2)=3y+1$

$$\rightarrow \quad x=\frac{3y+1}{y-2}$$

$y-2=0 \quad \rightarrow \quad y=2$



الشكل(3-7)

b) $y=\dfrac{4}{X^2+1}$

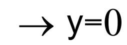
خط التقارب العمودي

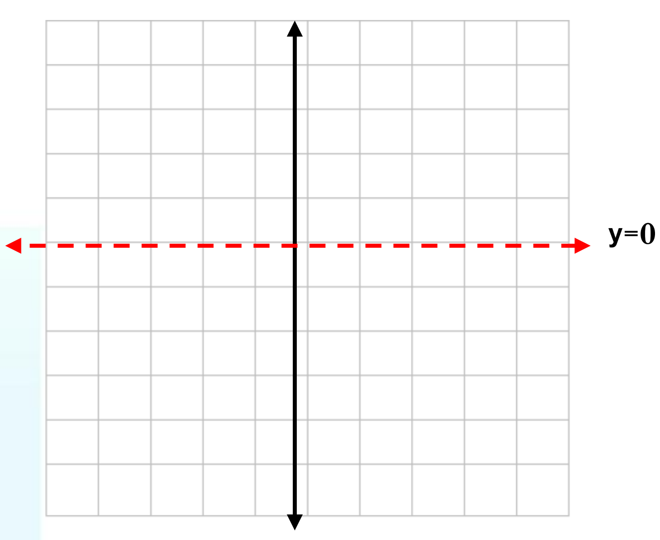
$X^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \notin R$

لا يوجد خط تقارب عمودي

خط التقارب الأفقي

$yx^2+y=4 \rightarrow yx^2=4-y \rightarrow x^2=\dfrac{4-y}{y}$





الشكل[3- 6]

[11 - 3] رسم المخطط البياني للدالة



الهدف من الدرس : أن يكون الطالب قادراً على أن:
يرسم مخطط بياني للدالة باستخدام معلومات التفاضل

خطوات رسم المخطط البياني للدالة

❶ نجد أوسع مجال للدالة

- إذا كانت الدالة كثيرة حدود فإن أوسع مجال = R
- إذا كانت الدالة كسرية

فإن أوسع مجال للدالة = R ماعدا قيم x التي تجعل المقام =0

❷ نجد نقاط التقاطع مع محور السينات ومع محور الصادات (إن أمكن)

- التقاطع مع محور الصادات: $x=0$ ونجد قيم y
- التقاطع مع محور السينات: $y=0$ ونجد قيم x

❸ نبين نوع التناظر (من معرفة نوع الدالة)

- يوجد تناظر مع نقطة الأصل السبب $f(-x)=-f(x)$
- يوجد تناظر مع محور الصادات السبب $f(-x)=f(x)$

❹ نجد خطوط التقارب العمودية وخطوط التقارب الأفقية

❺ نجد النقطة الحرجة إن وجدت

النهايات العظمى أو الصغرى أو مجرد حرجة ومناطق التزايد والتناقص

❻ نجد نقط الانقلاب (إن وجدت) ومناطق التقعر والتحدب

مثال36

ارسم باستخدام معلومات التفاضل الدالة $y=x^2+4x+3$

الحل

1) أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع محور الصادات:

$X=0 \rightarrow y=(0)^2+4(0)+3=3 \rightarrow (0 , 3)$

التقاطع مع محور السينات:

$y=0 \rightarrow 0=x^2+4x+3 \rightarrow (x+3)(x+1)=0$

$x=-3 \rightarrow (-3 ,0)$ or $x=-1 \rightarrow (-1 , 0)$

3) الدالة غير متناظرة

لأن $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$

4) **الدالة لا تملك خطوط تقارب عمودية ولا أفقية** لأنها كثيرة حدود

5) **النقط الحرجة:**

$y'= 2x+4=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow y=(-2)^2+4(-2)+3=-1$

النقطة $(-2 , -1)$

تمثل نهاية صغرى محلية

– – – – + + + + +

X=−2

مناطق التزايد = $\{ x:x > -2 \}$

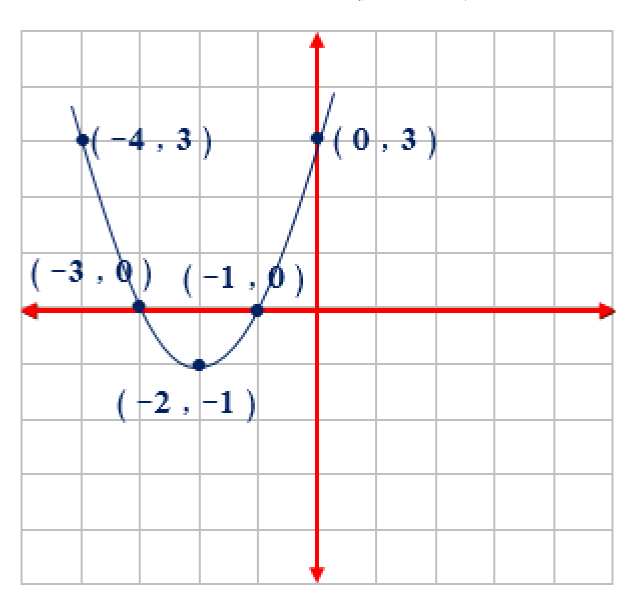
مناطق التناقص = $\{ x:x < -2 \}$

6) نقط الانقلاب: $y''=2$ لا توجد نقطة الانقلاب والدالة مقعرة

7) نضع جميع النقاط التي حصلنا عليها في جدول :

النقطة	نوعها
(0 ، 3)	نقطة تقاطع مع محور الصادات
(−1 ، 0)	نقطة تقاطع مع محور السينات
(−3 ، 0)	نقطة تقاطع مع محور السينات
(−2 ، −1)	نقطة نهاية صغرى محلية
(−4 ، −3)	نقطة إضافية

نعين جميع النقاط على النظام الإحداثي



الشكل[3-7]

مثال 37

ارسم باستخدام معلومات التفاضل الدالة $y=x^3-3x$

الحل:

1) أوسع مجال = R

2) التقاطع مع محور الصادات

$X=0 \rightarrow y=(0)^3-3(0)=0 \rightarrow (0\ ,\ 0)$

التقاطع مع محور السينات

$y=0 \rightarrow 0=x^3-3x \rightarrow 0=x(x^2-3)=0$

$\rightarrow x=0 \rightarrow (0\ ,\ 0)$ or $x^2=3 \rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$\rightarrow (\pm\sqrt{3}\ ,\ 0)$

3) الدالة متناظرة مع نقطة الأصل

لأن $f(-x)=-f(x)$

4) الدالة لا تملك خطوط تقارب أفقية ولا عمودية لأنها كثيرة حدود

5) النقط الحرجة:

$y'=3x^2-3=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm1$

$x=1 \rightarrow y=(1)^3-3(1)=-2 \rightarrow (1\ ,\ -2)$

$x=-1 \rightarrow y=(-1)^3-3(-1)=2 \rightarrow (-1\ ,\ 2)$

(1 ، −2) صغرى محلية

(− 1 ، 2) عظمى محلية

مناطق التزايد = $\{x : x>1\}$

$= \{x : x<1\}$

مناطق التناقص = $(-1\ ،\ 1)$

6) **نقط الانقلاب:**

$$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = (0)^3 - 3(0) = 0 \rightarrow (0\ ,\ 0)$$

تحدب   تقعر

$- - - -$ $+ + +$

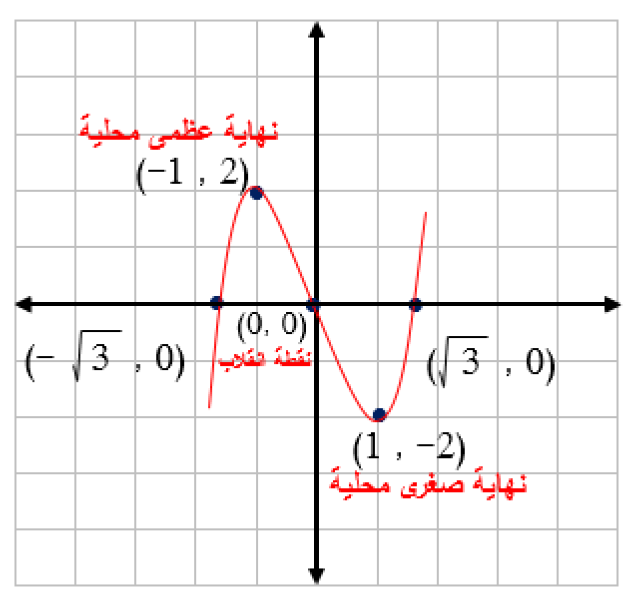
0

نقطة الانقلاب $(0، 0)$

مناطق التقعر $= \{ x : x > 0 \}$ ، مناطق التحدب $= \{ x : x < 0 \}$

7) **نضع جميع النقاط التي حصلنا عليها في جدول :**

النقطة	نوعها
$(0، 0)$	نقطة انقلاب
$(\sqrt{3}\ ،\ 0)$	نقطة تقاطع مع محور السينات
$(-\sqrt{3}\ ،\ 0)$	نقطة تقاطع مع محور السينات
$(1\ ،\ -2)$	نقطة نهاية صغرى محلية
$(-1\ ،\ 2)$	نقطة نهاية عظمى محلية



الشكل [3-8]

مثال 38

ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة $y=x^3+1$

الحل:

1) أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع محور الصادات: $x=0 \to y=0 \to (0\ ,\ 0)$

التقاطع مع محور السينات :

$y=0 \to 0=x^3+1 \to x^3=-1 \to x=-1 \to (-1\ ,\ 0)$

3) الدالة غير متناظرة لأن $f(-x)\neq f(x)\ ,\ f(-x)\neq -f(x)$

4) الدالة لا تملك خطوط تقارب لأنها كثيرة حدود

5) النقط الحرجة: $y'=3x^2=0 \to x=0 \to y=(0)^3+1=1$

$(0\ ،\ 1)$

+ + + +　　X=0　　+ + + +

مناطق التزايد= $\{x : x > 0\}$ ، $\{x : x < 0\}$

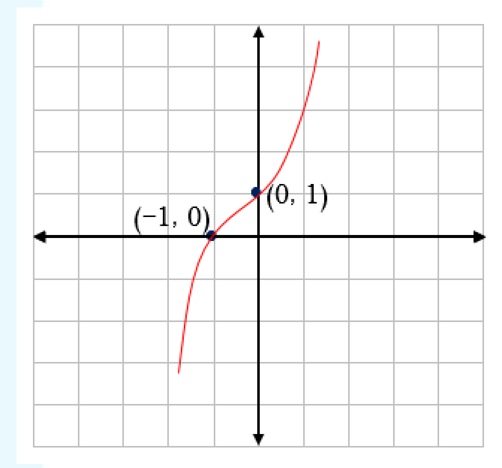
6) نقطة الانقلاب: $y''=6x=0 \to x=0 \to (0\ ,\ 1)$

مناطق التقعر = $\{x:x > 0\}$

مناطق التحدب = $\{x: x< 0\}$

تحدب　– – –　　تقعر　+ + +

X=0



الشكل [3-9]

مثال 39

ارسم الدالة $y=\dfrac{1}{X^2+1}$ باستخدام معلومات التفاضل

الحل:

1) أوسع مجال = R

2) التقاطع مع محور الصادات: $x=0 \rightarrow y=1 \rightarrow (0\ ,\ 1)$

لا يوجد تقاطع مع محور السينات $y\neq 0$ لأن البسط عدد ثابت

3) الدالة متناظرة مع محور الصادات لأن $f(-x)=f(x)$

4) خطوط التقارب

الخط العمودي: لا يوجد لأن $x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \notin R$

الخط الأفقي: نكتب الدالة بالشكل $x=f(y)$

ثم نصفر المقام ونجد قيمة y

$$yx^2+y=1 \rightarrow yx^2=1-y \rightarrow x^2=\frac{1-y}{y}$$

$$\rightarrow y=0$$

5) النهايات:

$$y'=\frac{(0)(x^2+1)-(1)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=0$$

$$-2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow y=1$$

+ + + +   – – – – – –

↗   x=0   ↘

(1 ، 0) نهاية عظمى محلية

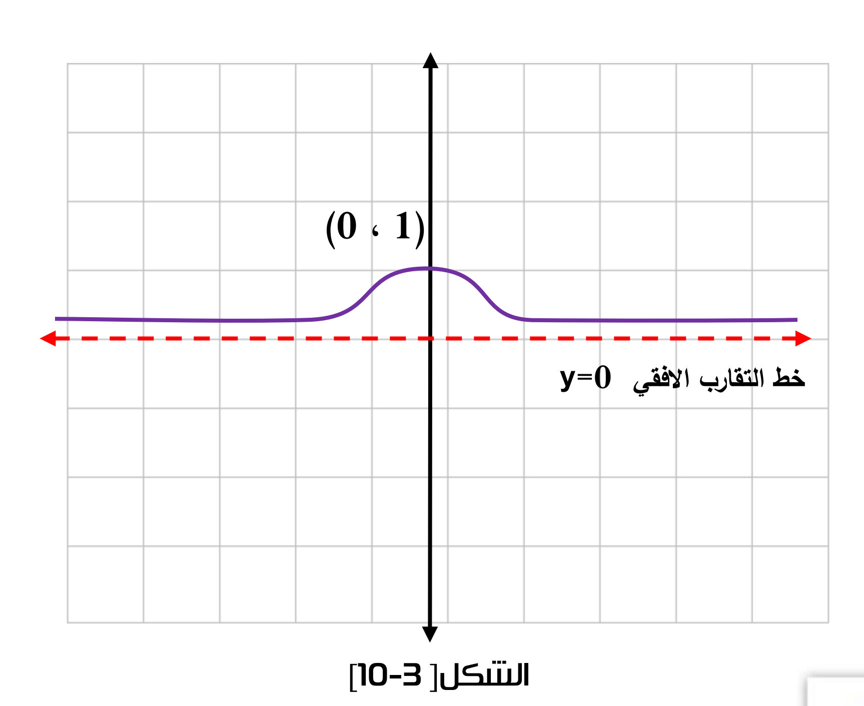
6) الانقلاب: نشتق مرتين ونبسط فنحصل على:

$$y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow 6x^2-2=0 \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

تقعر	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	تحدب	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	تقعر
+ + + +		− − − − −		+ + + +

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ، } \frac{3}{4}\right)$$

نقطتي الانقلاب



الشكل[3-10]

مثال 40

ارسم الدالة باستخدام معلوماتك في التفاضل : $y=\frac{3x-1}{X+1}$

الحل:

1) أوسع مجال = $R-\{-1\}$

2) التقاطع مع محور الصادات $x=0 \to y=-1 \to (0\,,\,-1)$

التقاطع مع محور السينات $y=0 \to 3x-1=0 \to x=\frac{1}{3}$

$(\frac{1}{3}\,,\,0)$

3)الدالة غير متناظرة لأن $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$

4) خط التقارب العمودي:

نجعل المقام = 0 ونجد قيمة x : $x+1=0 \to x=-1$

خط التقارب الأفقي:

$$yx+y=3x-1 \to yx-3x=-1-y \to x(y-3)=3x-1$$

$$\to x=\frac{3x-1}{y-3}$$

نجعل المقام =0 : $y-3=0 \to y=3$

5) النقط الحرجة إن وجدت:

$$y'=\frac{(3)(x+1)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$$

$\neq 0$

لأن البسط عدد ثابت

لا توجد نقط حرجة

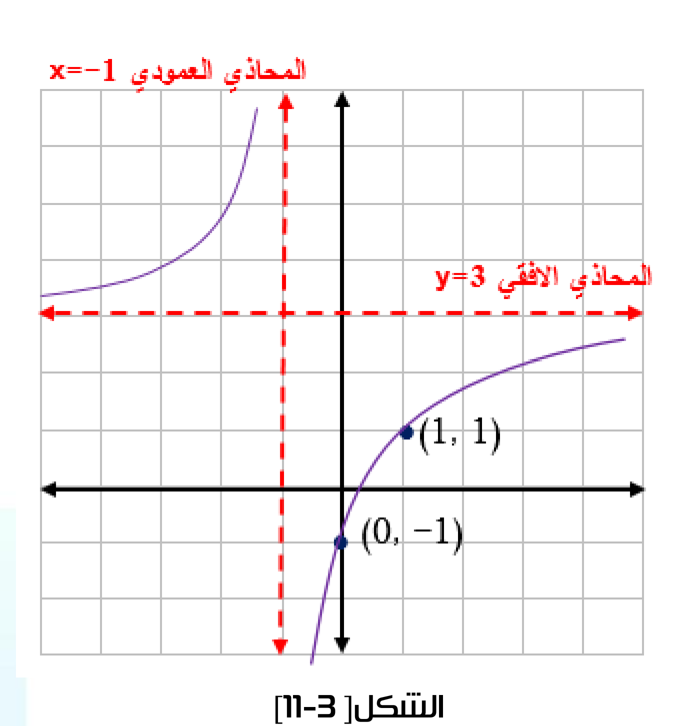
+ + + +   + + + +

$X=-1$

6) الانقلاب

$$y'' = \frac{-8}{(x+1)^3} \neq 0$$

+ + + +		– – –
تقعر	$x = -1$	تحدب



الشكل [3-11]

تمارين(3-5)

س1) ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال الآتية:

a) $f(x)=(1-x)^3+8$

b) $f(x)=2x^3-6x$

c) $y=(x-1)^4-1$

d) $y=x^3-3x^2+1$

e) $y=1+2x^2-x^4$

س2) ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية:

a) $y=\frac{-2}{x}$

b) $y=\frac{2x-1}{X+3}$

c) $y=\frac{2x^2}{X^2+1}$

[3 - 12] تطبيقات عملية على القيم العظمى أو الصغرى



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:
يحل مسائل عملية تطبيقية للنهايات العظمى والصغرى

للحصول على أكبر حجم أو أقل مساحة أو اقصى حمولة أو أقل مسافة بين نقطتين .... وغيرها

نتبع الخطوات التالية:

❶ نرسم مخططاً للمسالة (إن أمكن) وعين عليه الأجزاء المهمة في المسألة

❷ نكون علاقة بين المتغيرات المرتبطة بالكلمات أصغر، أكبر وإذا احتوت هذه العلاقة على أكثر من متغير واحد نستخدم علاقات أخرى معطاة أو من خلال الرسم حتى نجعل العلاقة في السؤال بمتغير واحد

❸عندها نجد المشتقة الأولى = 0 ونجد قيم المتغيرات.

مثال 41

جد عددين موجبين مجموعهما = 20 وحاصل ضربهما أصغر ما يمكن

الحل:

العدد الأول = x

العدد الثاني = y

$x + y=20 \rightarrow y=20 - x$ ......(1)

$Z = xy$ .... (2)

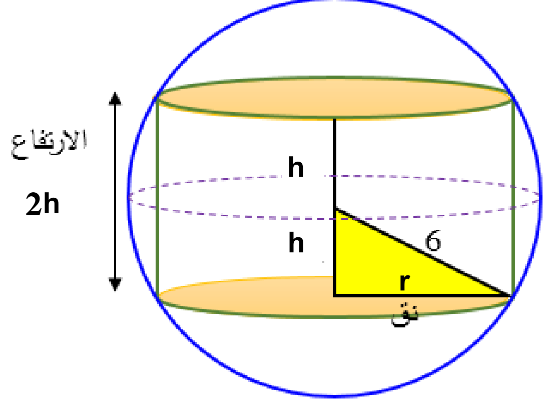
$Z=x(20-x) \rightarrow z= 20x -x^2$

$z' = 20-2x=0 \rightarrow x=10 \rightarrow y=10$

العدد الأول =10 ، العدد الثاني =10

مثال 42

جد أبعاد أكبر إسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كـرة نصف قطرها (6 cm)



الشكل[3-12]

الحل (الرسم)

نصف قطر الإسطوانة = r

ارتفاع الأسطوانة = 2h

حجم الأسطوانة = v

◆من المثلث القائم الزاوية نطبق

$$r^2 + h^2 = 36 \rightarrow r^2 = 36 - h^2 \quad ....(1)$$

◆من قانون حجم الإسطوانة

$$V = \pi r^2 (2h) \rightarrow v = 2\pi r^2 h \quad ....(2)$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$V = 2\pi(36-h^2)h \rightarrow v = 72\pi h - 2\pi h^3$$

نشتق

$$V' = 72\pi - 6\pi h^2 = 0 \rightarrow \div 6\pi \rightarrow 12 - h^2 = 0 \rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

الارتفاع $2h = 4\sqrt{3}$ cm

$$r^2 = 36 - 12 = 24 \rightarrow r = 2\sqrt{6} \quad \text{cm}$$

مثال 43

يراد عمل خزان بشكل متوازي السطوح المستطيلة قاعدته مربعة الشكل بحيث يتسع $343\ m^3$ بحيث تكون مساحته الكلية أقل ما يمكن جد أبعاد الخزان علما أنه ذو غطاء كامل؟

h
x
x

الشكل [3-13]

الحل

ح = الطول × العرض × الارتفاع

$$V = x\ x\ h \rightarrow 343 = x^2\ h \rightarrow h = \frac{343}{X^2} \quad .....(1)$$

مس الكلية = محيط القاعدة × الارتفاع + 2 مساحة القاعدة

$$A = 4x\ h + 2x^2 \quad ......(2)$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$A = 4x\left(\frac{343}{X^2}\right) + 2x^2 \rightarrow A = 4(343x^{-1}) + 2x^2$$

$$A' = -4 \times 343x^{-2} + 4x = 0 \rightarrow \div 4 \rightarrow -\frac{343}{X^2} + x = 0$$

نضرب في x^2

$$-343 + x^3 = 0 \rightarrow x^3 = 343 \rightarrow x = 7cm$$

الطول = العرض = 7cm

الارتفاع

$$h = \frac{343}{X^2} = \frac{343}{(7)^2} = 7cm$$

أبعاد الخزان : الطول = العرض = الارتفاع = 7 م (الخزان مكعب)

مثال 44

أطلقت قذيفة رأسياً إلى الأعلى ، فإذا كان بعدها عن سطح الأرض
$S(n)=12n^2-24n+169$ ما أعلى ارتفاع تصله القذيفة ؟

الحل

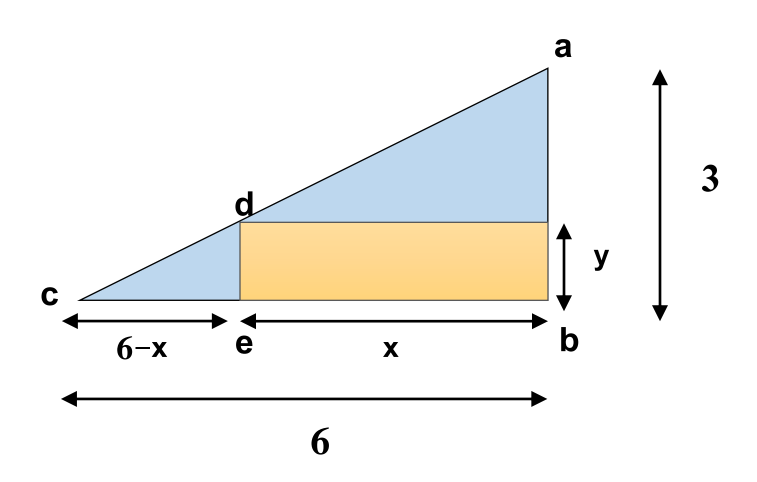
$S'(n)=24n-24=0 \rightarrow n=1$

زمن وصول القذيفة إلى أعلى نقطة

أعلى ارتفاع $S(1)=12(1)^2-24(1)+169=157\ \text{m}$

مثال 45

جد أبعاد أكبر مستطيل يتم وضعه داخل مثلث قائم الزاوية
طول قاعدته (6cm) وارتفاعه (3cm)



الشكل [3-14]

من تشابه المثلثين abc، dec نحصل على:

$$\frac{de}{ba} = \frac{ce}{cb}$$

$$\frac{y}{3} = \frac{6-x}{6} \rightarrow y = \frac{6-x}{2} \quad ..(1)$$

$$A = xy \quad ....(2)$$

$$A = x\left(\frac{6-x}{2}\right) \rightarrow A = \frac{6x-x^2}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}(6x - x^2)$$

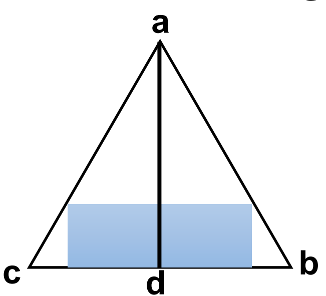
$$A' = \frac{1}{2}(6-2x) = 0 \quad \rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$y = \frac{6-3}{2} = 1.5 \text{ cm}$$

نشاط

abc مثلث فيه ab=ac ، bc=12 cm ، ad=20cm

جد بعدي أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل هذا المثلث



الشكل [3-15]

مثال 46

جد نقطة تنتمي للقطع المكافئ $y^2=8x$ **بحيث** تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(6 ، 0)$

الحل:

$$y^2 = 8x \qquad ....(1)$$

البعد بين النقطة $(x ،y)$ والنقطة $(6 ، 0)$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 0)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 6)^2 + y^2} \qquad ....(2)$$

نعوض معادلة(1) في معادلة (2)

$$S = \sqrt{(x - 6)^2 + 8x} \rightarrow s = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 8x}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 4x + 36} \rightarrow s' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{X^2 - 4x + 36}} = 0$$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y^2 = 8(2) \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$$

$$(2 , \pm 4)$$

تمارين (3 -6)

س1) خزان إسطواني قائم مفتوح من الأعلى سعته $24\pi cm^3$ ، جد أبعادها لكي تكون المساحة الكلية المستخدمة في صناعته أقل ما يمكن.

س2) جد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة ناتجة من دوران مستطيل حول أحد أضلاعه محيطه 30 cm

س3) وعاء بشكل متوازي السطوح المستطيلة قاعدته مربعة الشكل مجموع أبعاده الثلاثة =90cm جد أبعاده ليكون حجمه أعظم ما يمكن .

س4) نافذة زجاجية بشكل مستطيل يعلوها نصف دائرة فإذا كان محيط النافذة 36m فأوجد نصف قطر الدائرة التي تسمح بدخول أكبر كمية من الضوء.

س5) جد أبعاد أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 12 cm وطول نصف قطر قاعدته4cm .

س6) جد أكبر مساحة لمستطيل يتم وضعه داخل دائرة مساحتها $36\pi cm^2$.

س7) سلك طوله =10m ، جد أبعاد أكبر مستطيل يمكن تكوينه من هذا السلك.

س8) جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يوضع داخل كرة نصف قطرها3cm

س9) جد أبعاد أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 12cm ونصف قطره 4cm بحيث يكون رأسه في قاعدة المخروط الخارجي.


تم بحمد الله